ISBN: 973 – 8043 – 109 – 8

Dumitru BUŞNEAG Dana PICIU

LECȚII de ALGEBRĂ

Editura Universitaria Craiova

CUPRINS

Index de notaţii şi abrevieri

a.î.	: astfel încât
$\Rightarrow(\Leftrightarrow)$	: implicaţia (echivalenţa) logică
$(\forall)$ $((\exists))$	: cuantificatorul universal (existenţial)
$x\in A$	: elementul x aparţine mulţimii A
$A\subseteq B$	: mulţimea A este inclusă în mulţimea B
$A\subsetneq B$	: mulţimea A este inclusă strict în mulţimea B
$A\cap B$	: intersecţia mulţimilor A şi B
$A\cup B$	: reuniunea mulţimilor A şi B
$A\setminus B$	: diferenţa mulţimilor A şi B
$A\Delta B$	: diferenţa simetrică a mulţimilor A şi B
$P(M)$	: familia submulţimilor mulţimii M
C_MA	: complementara în raport cu M a mulţimii A
$A\times B$	: produsul cartezian al mulţimilor A şi B
Δ_A	:diagonala produsului cartezian A×A
Rel(A)	:mulţimea relaţiilor binare de pe mulţimea A
Echiv(A)	: mulţimea relaţiilor de echivalenţă de pe mulţimea A
φ_A	:funcţia caracteristică ataşată mulţimii A
$\lvert M\rvert$ (sau card M)	: cardinalul mulţimii M (dacă M este finită $\lvert M\rvert$ reprezintă numărul elementelor lui M)
1_A	: funcţia identică a mulţimii A
$\mathbb{N}(\mathbb{N}^*)$	: mulţimea numerelor naturale (nenule)
$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}^*)$	: mulţimea numerelor întregi (nenule)
$\mathbb{Q}(\mathbb{Q}^*)$	: mulţimea numerelor raţionale (nenule)
$\mathbb{Q}_+^*$	: mulţimea numerelor raţionale strict pozitive
$\mathbb{R}(\mathbb{R}^*)$	: mulţimea numerelor reale (nenule)
$\mathbb{R}_+^*$	: mulţimea numerelor reale strict pozitive
$\mathbb{C}(\mathbb{C}^*)$	: mulţimea numerelor complexe (nenule)
$\mathbb{H}$	: corpul quaternionilor
$\lvert z\rvert$	: modulul numărului complex z

CAPITOLUL 5:
ELEMENTE DE TEORIA CATEGORIILOR

Noțiunile de *categorie* și *functor* au fost introduse în mod explicit de către S. Eilenberg și S. Mac Lane în 1945 (plecând de la studiul diferitelor construcții de obiecte din matematică ca-și pentru a da un sens precis noțiunii de *dualitate*).

Până în prezent, metodele generale ale teoriei categoriilor sunt regăsite în aproape toate domeniile matematicii, astfel că se poate spune pe bună dreptate că matematica modernă este de fapt studiul unor categorii și functori particulari.

§ 1. Definiția unei categorii. Exemple. Subcategorie. Duala unei categorii. Principiul dualizării. Produs de categorii.

Definiția 1.1. Vom spune că s-a dat o *categorie* C dacă s-a dat o clasă Ob(C) ale cărei elemente se numesc *obiectele* lui C iar pentru orice pereche ordonată (M, N) de obiecte din C s-a dat o mulțime C(M, N), eventual vidă (numită mulțimea *morfismelor* de la M la N) a.î.:

1. Pentru orice triplet (M, N, P) de obiecte ale lui C s-a dat o aplicație $\mathbf{C}(M, N) \times \mathbf{C}(N, P) \to \mathbf{C}(M, P)$, $(f, g) \to gf$ numită *compunerea* morfismelor.

2. Compunerea morfismelor este asociativă, adică dacă M, N, P, Q sunt obiecte din **C** și $f \in \mathbf{C}(M, N)$, $g \in \mathbf{C}(N, P)$, $h \in (P, Q)$, atunci $h(gf) = (hg)f$.

3. Pentru orice obiect M al lui **C**, există $1_M \in \mathbf{C}(M, M)$ (numit *morfismul identic* al lui M) a.î. pentru oricare două obiecte N, P ale lui **C** și $f \in \mathbf{C}(M, N)$, $g \in \mathbf{C}(P, M)$ avem $f1_M = f$ și $1_M g = g$.

4. Dacă cuplurile de obiecte (M, N) și (M', N') sunt distincte, atunci $\mathbf{C}(M, N) \cap \mathbf{C}(M', N') = \varnothing$.

Observația 1.2. 1. Foarte des, în loc de $M \in Ob(\mathbf{C})$, vom scrie $M \in \mathbf{C}$. Dacă $f \in \mathbf{C}(M, N)$, mai consemnăm acest fapt prin notațiile $f : M \to N$ sau $M \xrightarrow{f} N$.

În acest caz, obiectul M se numește *domeniul (sursa)* lui f iar N *codomeniul (cosursa)* lui f.

O categorie **C** în care clasa Ob (**C**) este o mulțime se numește *categorie mică* (pentru clarificarea noțiunilor de *mulțime* și *clasă* recomandăm cititorului lucrarea [22]).

2. Dacă pentru $M \in \mathbf{C}$, $1_M : M \to M$ există, atunci el este unic determinat. Într-adevăr, dacă $1'_M : M \to M$ este un alt morfism identic al lui M, atunci avem $1_M 1'_M = 1'_M$ și tot $1_M 1'_M = 1_M$, deci $1_M = 1'_M$.

Exemple de categorii

1. Categoria **Ens** (a *mulțimilor*). Obiectele lui **Ens** sunt mulțimile.

Pentru M, N ∈ **Ens**, $\mathbf{Ens}(M, N) = \{f : M \to N\}$ iar compunerea morfismelor în **Ens** este dată de compunerea funcțiilor. Pentru $X \in \mathbf{Ens}$, funcția identică a lui X joacă rolul morfismului identic 1_X.

2. Categoria **Pre** (a *mulțimilor preordonate*). Obiectele lui Pre sunt mulțimile preordonate (A, ≤). Pentru (A, ≤), $(A', \leq') \in$ **Pre**, **Pre** $((A, \leq), (A', \leq')) = \{f : A \to A' /$ *pentru orice* $x, y \in A,$ | $x \leq y \Rightarrow \Rightarrow f(x) \leq' f(y)\}$ iar compunerea morfismelor în **Pre** (ce se mai numesc aplicații *izotone*) este dată de compunerea funcțiilor. Pentru (X, ≤) ∈ **Pre**, funcția identică a lui X (care este izotonă) joacă rolul morfismului identic 1_X.

3. Categoria **Gr** (a *grupurilor*). Obiectele lui **Gr** sunt grupurile, pentru H, K ∈ **Gr**, **Gr** (H, K) = $\{f : H \to K / f$ este morfism de grupuri$\}$, compunerea morfismelor este dată de compunerea funcțiilor iar pentru G ∈ **Gr** funcția identică a lui G (care este morfism de grupuri) joacă rolul morfismului identic 1_G.

4. Categoria **Ann** (a *inelelor unitare*). Obiectele lui **Ann** sunt inelele unitare, pentru A, B ∈ **Ann**, **Ann** (A, B) = $\{f : A \to B / f$ este morfism de inele unitare$\}$, compunerea morfismelor este dată de compunerea funcțiilor iar pentru $A \in$ **Ann**, funcția identică a lui A (care este morfism de inele unitare) joacă rolul morfismului identic 1_A.

5. Categoria **Top** (a *spațiilor topologice*). Obiectele lui **Top** sunt spațiile topologice, morfismele sunt funcțiile continue iar compu- nerea morfismelor este dată de compunerea obișnuită a funcțiilor.

Pentru $(X, \tau) \in$ **Top**, funcția identică a lui X (care este în mod evident funcție continuă) joacă rolul morfismului identic 1_X.

6. Fie A un inel unitar. Vom defini o categorie notată **A** astfel: $Ob(\mathbf{A}) = \{A\}$ iar $\mathbf{A}(A, A) = A$. Compunerea este dată de înmulțirea elementelor din A iar elementul neutru pentru înmulțire joacă rolul morfismului identic 1_A.

7. Fie **A** o clasă de algebre de același tip τ. Categoria ale cărei obiecte sunt algebrele din **A** iar pentru $A, B \in \mathbf{A}$, $\mathbf{A}(A, B)$ este mulțimea morfismelor de algebre de tip τ de la A la B, se zice *categorie algebrică* (vezi [3]).

Dacă algebrele din **A** formează o varietate (adică o clasă ecuațională de algebre) vom spune despre categoria **A** că este o *categorie ecuațională* (vezi [3]).

Definiția 1.3. Fie C o categorie. Prin *subcategorie* a lui C înțelegem o categorie C′ ce îndeplinește următoarele condiții:

1. $Ob(C') \subseteq Ob(C)$

2. Dacă $M, N \in C'$, **atunci** $C'(M,N) \subseteq C(M,N)$

3. Compunerea morfismelor din C′ este indusă de compunerea morfismelor din C

4. Dacă $M \in C'$, **atunci** 1_M **(din C′) coincide cu** 1_M **(din C).**

O subcategorie C′ a lui C cu proprietatea că pentru oricare $M, N \in C'$, $C'(M,N) = C(M,N)$ **se numește subcategorie *plină*.**

Exemple de subcategorii.

1. Dacă notăm prin **Ab** categoria ale cărei obiecte sunt grupurile abeliene, atunci **Ab** devine în mod canonic subcategorie plină a lui **Gr**.

2. Dacă notăm prin **Ord** categoria ale cărei obiecte sunt mulțimile ordonate, atunci în mod canonic **Ord** devine subcategorie plină a lui **Pre**.

3. Fie **L** categoria laticilor (ale cărei obiecte sunt laticile iar pentru două latici L, L', $\mathbf{L}(L, L') = \{f : L \to L' \,/\, f$ este morfism de latici$\}$. Atunci, în mod canonic, **L** devine subcategorie a lui **Ord**.

Dacă notăm prin **L (0, 1)** categoria ale cărei obiecte sunt laticile mărginite (adică cu prim și ultim element), iar pentru $L, L' \in \mathbf{L}(0, 1)$, $\mathbf{L}(0, 1)(L, L') = \{f \in \mathbf{L}(L, L') \,/\, f(0) = 0 \text{ și } f(1) = 1\}$, atunci **L (0, 1)** devine în mod canonic subcategorie a lui **L**.

4. Dacă notăm prin **Ld (0, 1)** categoria laticilor distributive mărginite (ale cărei obiecte sunt laticile distributive mărginite iar morfismele sunt cele din **L (0, 1)**) atunci **Ld (0, 1)** devine subcategorie a lui **L (0, 1)** (vezi § 6 de la Capitolul 1).

5. Dacă notăm prin **Fd** categoria corpurilor, atunci **Fd** devine în mod canonic subcategorie a lui **Ann**.

Definiția 1.4. Fie C o categorie. Vom defini o nouă categorie C^0 **(pe care o vom numi *duala* lui C) în modul următor: punem** $Ob(C^0) = Ob(C)$ **iar pentru** $M, N \in C^0$, $C^0(M, N) = C(N, M)$. **Legea de compunere se definește în felul următor: dacă** $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ **sunt morfisme din categoria C, atunci** $g * f = fg$ **(am notat prin** $*$ **legea de compunere din** C^0**). Evident** $(C^0)^0 = C$.

Introducerea categoriei duale permite ca orice noțiune și enunț relative la categoria C ce se exprimă cu ajutorul obiectelor și morfismelor să se dualizeze într-o noțiune și enunț relative la categoria C^0(acest principiu poartă numele de *principiul dualizării*). În general, găsirea dualei unei categorii se dovedește a fi un lucru destul de complicat.

Fie $(C_i)_{i \in I}$ o familie de categorii indexată după mulțimea $I \neq \emptyset$.

Vom defini o nouă categorie **C** în felul următor:

Obiectele lui **C** sunt familii $(M_i)_{i \in I}$ de obiecte, indexate cu I, unde $M_i \in C_i$, pentru oricare $i \in I$. Dacă $M = (M_i)_{i \in I}$, $N = (N_i)_{i \in I}$ sunt două obiecte ale lui **C**, atunci prin definiție $\mathbf{C}(M, N) = \underset{i \in I}{X} C_i(M_i, N_i)$.

Dacă mai avem $P = (P_i)_{i \in I} \in \mathbf{C}$ și $f = (f_i)_{i \in I} \in \mathbf{C}(M, N)$, $g = (g_i)_{i \in I} \in \mathbf{C}(N, P)$, atunci definim compunerea $gf = (g_i f_i)_{i \in I}$.

Definiția 1.5. Categoria C definită mai sus se numește *produsul direct* al familiei de categorii $(C)_{i\in I}$; vom scrie $C = \underset{i\in I}{X} C_i$.

§ 2. Morfisme și obiecte remarcabile într-o categorie. Nucleul și conucleul unui cuplu de morfisme

Definiția 2.1. Fie C o categorie iar $u : M \to N$ un morfism în C. Vom spune că u este *monomorfism (epimorfism)* în C, dacă pentru orice $P \in C$ și $f, g \in C(P, M)$ (respectiv $f, g \in C(N, P)$), din $uf = ug$ (respectiv $fu = gu$) rezultă $f = g$.

Observația 2.2. Din Definiția 2.1. deducem că morfismul u este epimorfism în C $\Leftrightarrow$ u este monomorfism în C^0.

Vom spune despre u că este *bimorfism* dacă este simultan monomorfism și epimorfism.

Definiția 2.3. Vom spune despre un morfism $u : M \to N$ din categoria C că este un *izomorfism* dacă există $v : N \to M$ a.î. $vu = 1_M$ și $uv = 1_N$.

Vom spune despre obiectele M și N că sunt *izomorfe* (vom scrie $M \approx N$) dacă există un izomorfism $u : M \to N$.

Observația 2.4.

1. Dacă $v, v' : N \to M$ verifică ambele condiții din Definiția 2.3., atunci $v = v'$. Într-adevăr, avem egalitățile $(vu)v' = 1_M v' = v'$ și $(vu)v' = v(uv') = v1_N = v$, de unde $v = v'$. În caz că există, vom spune despre v că este *inversul* lui u și vom scrie $v = u^{-1}$.

2. Dacă C' este o subcategorie a lui C iar u este monomorfism (epimorfism) în C', în general nu rezultă că u este monomorfism (epimorfism) și în C.

Într-adevăr, fie $u : X \to Y$ un morfism oarecare din C care nu este monomorfism și nici epimorfism în C, iar C' subcategoria lui C ale cărei obiecte sunt X și Y iar ale cărei morfisme sunt 1_X, 1_Y și u. Evident, u este bimorfism în C', fără a fi însă bimorfism în C.

3. După cum se va constata în continuare, orice izomorfism este bimorfism, pe când reciproc nu este adevărat. Un exemplu putem găsi în categoria **Top**. Într-adevăr, fie X o mulțime ce conține cel puțin două elemente iar $1_X : X \to X$ funcția identică a lui X în **Ens**.

Dacă se înzestrează codomeniul lui 1_X cu topologia grosieră iar domeniul său cu topologia discretă (cea pentru care toate submulțimile lui X sunt deschise), atunci 1_X devine un bimorfism în **Top** care nu este izomorfism. Într-adevăr, dacă 1_X ar fi izomorfism, atunci $(1_X)^{-1} = 1_X$ care nu este funcție continuă de la X (înzestrată cu topologia grosieră) la mulțimea X (înzestrată cu topologia discretă).

De fapt, izomorfismele din **Top** sunt exact homeomorfismele de spații topologice.

Definiția 2.5. O categorie C în care orice bimorfism este izomorfism se zice *balansată* (sau *perfectă*).

Conform cu cele de mai înainte, categoria **Top** nu este balansată.

Definiția 2.6. Fie $u : M \to N$ un morfism în categoria C. Numim *secțiune* (sau *invers la dreapta*) a lui u, orice morfism $v : N \to M$ a.î. $uv = 1_N$. Numim *retracție* (sau *invers la stânga*) a lui u orice morfism $w : N \to M$ a.î. $wu = 1_M$.

Propoziția 2.7. Fie $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ două morfisme din categoria C.

(i) Dacă f este secționabil (retractabil), atunci f este epimorfism (monomorfism)

(ii) Dacă f și g sunt monomorfisme (epimorfisme), atunci gf este monomorfism (epimorfism)

(iii) Dacă gf este monomorfism (epimorfism), atunci f (respectiv g) este monomorfism (respectiv epimorfism)

(iv) Dacă f și g sunt izomorfisme, atunci și gf este izomorfism și $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$

(v) Dacă f și g sunt secționabile (retractabile), atunci și gf este secționabil (retractabil)

(vi) Dacă gf este secționabil (retractabil), atunci g este secționabil (f este retractabil)

(vii) Un monomorfism (epimorfism) este izomorfism dacă și numai dacă este secționabil (retractabil)

(viii) Dacă gf este izomorfism, atunci g este secționabil iar f este retractabil

(ix) Un bimorfism secționabil (retractabil) este izomorfism.

Demonstrație.

(i). Să presupunem că f este secționabil; atunci există $h : N \to M$ a.î. $fh = 1_N$. Fie acum $r, s : N \to P$ a.î. $rf = sf$; deducem imediat că $(rf)h = (sf)h \Leftrightarrow r(fh) = s(fh) \Rightarrow r1_N = s1_N \Rightarrow r = s$, adică f este epimorfism. Analog se demonstrează că dacă f este retractabil, atunci f este monomorfism.

(ii). Să presupunem că f și g sunt monomorfisme și fie $r,s : Q \to M$ a.î. $(gf)r = (gf)s$. Atunci $g(fr) = g(fs)$ și cum g este monomorfism $\Rightarrow fr = fs \Rightarrow r = s$ (căci și f este monomorfism). Deducem astfel că gf este monomorfism. Analog se probează că dacă f și g sunt epimorfisme, atunci gf este epimorfism.

Deoarece restul subpunctelor se probează analog, le lăsăm ca exercițiu. ■

Aplicații

1. În categoria **Ens** monomorfismele (epimorfismele, izomorfismele) coincid cu funcțiile injective (surjective, bijective) - vezi Propozițiile 3.7, 3.8 și Corolarul 3.9 de la Capitolul 1.

2. În categoria **Gr** a grupurilor, monomorfismele (epimorfismele, izomorfismele) coincid cu morfismele injective (surjective, bijective) de grupuri (vezi Propozițiile 5.6, 5.8 și § 10 de la Capitolul 2).

Faptul că izomorfismele din **Gr** coincid cu morfismele bijective din **Gr** este imediat. Rezultă astfel că **Gr** este categorie balansată.

Observația 2.8. Există categorii în care morfismele (epimorfismele) nu sunt neapărat funcții injective (surjective).

Într-adevăr, să notăm prin **Div** subcategoria lui **Ab** formată din grupurile abeliene *divizibile* (reamintim că un grup aditiv G se zice *divizibil*, dacă pentru orice $y \in G$ și n număr natural nenul, există $x \in G$ a.î. $y = nx$).

Să considerăm grupurile abeliene divizibile $(\mathbf{Q}, +)$ și $(\mathbf{Q} / \mathbf{Z}, +)$ iar $p : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q} / \mathbf{Z}$ morfismul surjectiv canonic de grupuri.

Vom demonstra că p este monomorfism în categoria **Div** (care în mod evident nu este funcție injectivă).

Într-adevăr, să considerăm în **Div** diagrama $G \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} \mathbf{Q} \xrightarrow{p} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ a.î. $u \neq v$ și să probăm că $pu \neq pv$. Deci există $a \in G$ a.î. $u(a)-v(a) = r / s \in \mathbf{Q}^*$, cu $s \neq \pm 1$ (putem presupune $s \neq \pm 1$, căci dacă $s = \pm 1$, atunci considerând $s' \neq \pm 1$, există $a' \in G$ a.î. $s'a' = a$ și este evident că $u(a') - v(a') = r / s'$). Dacă $b \in G$ a.î. $rb = a$, atunci $r(u(b)-v(b)) = u(a) - v(a) = r / s$, de unde $pu \neq pv$, deci p este monomorfism în **Div**. Tot acest exemplu ne arată că **Div** nu este o categorie balansată.

Să considerăm acum categoria **Ann** a inelelor unitare și în aceasta morfismul incluziune $i : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$. Vom proba că i este epimorfism în **Ann** (fără a fi funcție surjectivă).

Într-adevăr, să considerăm în **Ann** diagrama $\mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathbf{Q} \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} A$ a.î. $u \circ i = v \circ i \Leftrightarrow u_{|\mathbf{Z}} = v_{|\mathbf{Z}}$ și să demonstrăm că $u = v$.

Dacă $x = m/n \in \mathbf{Q}$, atunci $u(x) = u(m/n) = mu(1/n) = m[u(n)]^{-1}$ (căci u este morfism de inele unitare) iar $v(x) = v(m/n) = m[v(n)]^{-1}$ și cum $u(n) = v(n)$ deducem că $u(x) = v(x)$, adică $u = v$.

Propoziția 2.9. Fie A o categorie ecuațională. Atunci monomorfismele în A sunt exact morfismele injective.

Demonstrație. Faptul că orice morfism injectiv este monomorfism se probează imediat. Să arătăm acum că dacă $f \in \mathbf{A}(A, B)$ este morfism în **A**, atunci f este aplicație injectivă.

Pentru aceasta fie $x, y \in A$ a.î. $f(x) = f(y)$.

Conform Teoremei 6.16. de la Capitolul 2 din [3], $\mathbf{F}_A(\{s\})$ exis- tă și este un obiect din **A**. Considerând $g, h : \{s\} \to A$, $g(s) = x$ și $h(s) = y$, există $g_1, h_1 \in \mathbf{A}(\mathbf{F}_A(\{s\}), A)$ a.î. $g_1(s) = g(s) = x$ și $h_1(s) = h(s) = y$. Deoarece $f(x) = f(y)$, deducem că $(f \circ g_1)(s) = f(g_1(s)) = f(x) = f(y) = f(h_1(s)) = (f \circ h_1)(s)$ iar datorită proprietății de unicitate din definiția lui $\mathbf{F}_A(\{s\})$ deducem că $f \circ g_1 = f \circ h_1$ iar de aici că $g_1 = h_1$ (f fiind monomorfism în **A**). În particular $g_1(s) = h_1(s)$, adică $x = y$, deci f este aplicație injectivă. ■

Fie C o categorie. Un obiect I(F) din C se zice *inițial (final)*, dacă pentru orice obiect $X \in C$, $C(I, X)$ $(C(X, F))$ are un singur element notat α_X (ω_X).

Un obiect O din C care este simultan inițial și final se nu- mește obiect *nul*.

Prin *subobiect* al unui obiect $A \in C$ înțelegem un dublet (B, u) cu $B \in C$ iar $u \in C(B, A)$ monomorfism.

Două subobiecte (B, u), (B', u') ale lui A se zic *izomorfe* dacă există un izomorfism $f \in C(B, B')$ a.î. $u' \circ f = u$.

Observația 2.10. **1.** În general, într-o categorie algebrică **A** noțiunile de subobiect și subalgebră sunt diferite (de exemplu dacă $A \in \mathbf{A}$ iar $B \leq A$ este posibil ca $B \notin \mathbf{A}$).

În cazul categoriilor ecuaționale însă cele două noțiuni sunt identice.

2. Evident, I este obiect inițial (F este obiect final) în categoria **C** dacă și numai dacă I^0 (F^0) este obiect final (inițial) în $\mathbf{C}^0$.

3. Dacă există un obiect inițial (final, nul) în categoria **C**, acesta este unic până la un izomorfism.

Într-adevăr, dacă I, I' sunt două obiecte inițiale în categoria **C**, atunci există un morfism $u : I \to I'$ și exact un morfism $v : I' \to I$. În mod evident, $uv = 1_I$ și $vu = 1_{I'}$, de unde $I \approx I'$. Analog pentru obiectele finale și nule.

4. Dacă I este obiect inițial în categoria **C**, atunci orice morfism $u : X \to I$ din **C** este secționabil (fiind deci epimorfism) iar dacă F este un obiect final, atunci orice morfism $v : F \to X$ din **C** este retractabil (fiind deci monomorfism).

5. Dacă în categoria **C** avem un obiect nul **O**, atunci pentru orice cuplu (X, Y) de obiecte din **C**, $\mathbf{C}(X, Y) \neq \emptyset$ (căci $\mathbf{C}(X, Y)$ conține cel puțin compusul morfismelor $X \xrightarrow{\omega_X} \mathbf{O} \xrightarrow{\alpha_Y} Y$ notat $\mathbf{O}_{YX}$ și numit *morfismul nul* de la X la Y). Evident, pentru orice $u : X' \to X$ și $v : Y \to Y'$, $\mathbf{O}_{YX}u = \mathbf{O}_{YX'}$ și $v\mathbf{O}_{YX} = \mathbf{O}_{Y'X}$.

Exemple

1. În categoria **Ens**, mulțimea vidă $\emptyset$ este singurul obiect inițial și orice mulțime formată dintr-un singur element este un obiect final (evident, toate sunt izomorfe între ele). Deducem imediat că în **Ens** nu avem obiecte nule.

2. În categoria corpurilor **Fd** nu avem nici obiecte inițiale și nici obiecte finale.

Definiția 2.11. **O familie $(G_i)_{i \in I}$ de obiecte dintr-o categorie C se numește familie de *generatori (cogeneratori)* ai lui C, dacă pentru orice X, Y ∈ C și u, v ∈ C (X, Y), cu u ≠ v, există** $f \in \bigcup_{i \in I} C(G_i, X)$ $\left(f \in \bigcup_{i \in I} C(Y, G_i)\right)$ **a.î. uf ≠ vf (fu ≠ fv).**

Dacă mulțimea de generatori (cogeneratori) se reduce la un singur element G, atunci G se numește *generator (cogenerator)* al lui **C**.

Evident, noțiunile de generator și cogenerator sunt noțiuni duale.

Exemple.

1. În categoria **Ens** orice mulțime nevidă conținând cel puțin două elemente este un cogenerator.

2. În categoria **Top**, orice spațiu topologic discret, nevid, este un generator pentru **Top** și orice spațiu topologic conținând cel puțin două elemente și înzestrat cu topologia grosieră este un cogenerator pentru **Top**.

Fie **C** o categorie iar $f, g : X \to Y$ un cuplu de morfisme din **C**.

Definiția 2.12. Numim *nucleu* al cuplului (f, g) de morfisme, un dublet (K, i), cu $K \in C$ și $i \in C(K, X)$ a.î.

i) fi = gi

ii) Dacă (K', i') este un alt dublet ce verifică i), atunci există un unic $u : K' \to K$ a.î. $iu = i'$.

Observația 2.13. Dacă nucleul unui cuplu de morfisme există, atunci el este unic până la un izomorfism.

Într-adevăr, fie (K', i') un alt nucleu pentru cuplul (f, g). Atunci există $u : K' \to K$ și $u' : K \to K'$ a.î. $i'u' = i$. Deducem imediat că $iuu' = i$ și $i'u'u = i'$ și datorită condiției de unicitate din definiția nucleului, deducem că $uu' = 1_K$ și $u'u = 1_{K'}$, adică $K \approx K'$.

În caz că există, vom nota nucleul cuplului de morfisme (f, g) prin Ker (f, g).

Noțiunea duală celei de nucleu al unei perechi de morfisme este aceea de *conucleu* al unei perechi de morfisme.

Mai precis, avem:

Definiția 2.14. Numim *conucleu* al cuplului de morfisme (f, g) un dublet (p, L) cu $L \in C$ și $p \in C(Y, L)$ a.î.

i) pf = pg

ii) Dacă (p', L') este un alt dublet ce verifică i), atunci există un unic $u : L \to L'$ a.î. $up = p'$.

Analog ca în cazul nucleului, conucleul unui cuplu de morfisme (ce se va nota prin Coker (f, g)), dacă există, atunci el este unic până la un izomorfism.

Observația 2.15. Dacă Ker (f, g) = (K, i), atunci i este monomorfism în **C**.

Într-adevăr, fie $T \in$ **C** și $h, t : T \to K$ a.î. $ih = it = i'$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\ T \arrow[u, shift left, "h"] \arrow[u, shift right, "t"'] \arrow[ur, "i'"'] & & \end{tikzcd}$$

Atunci $fi' = gi'$ și cum h și t închid diagrama următoare

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] & X \\ T \arrow[u, shift left, "h"] \arrow[u, shift right, "t"'] \arrow[ur, "i'"'] & \end{tikzcd}$$

deducem din Definiția 2.12. că h = t, adică i este monomorfism în **C**.

Dual se demonstrează că dacă Coker (f, g) = (p, L), atunci p este epimorfism în **C**.

Vom spune despre categoria **C** că *posedă nuclee (conuclee)* dacă orice cuplu de morfisme din **C** are nucleu (conucleu).

Exemple.

1. Categoria **Ens** posedă nuclee și conuclee (vezi § 4 de la Capitolul 1).

2. Categoria **Top** posedă nuclee și conuclee.

Într-adevăr, fie $f, g : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ un cuplu de morfisme din **Top** iar (K, i) nucleul în **Ens** al cuplului subiacent $f, g : X \to Y$.

Dacă K este înzestrată cu topologia $\bar{\tau}$ indusă de topologia τ a lui X, atunci $i : (K, \bar{\tau}) \to (X, \tau)$ devine aplicație continuă iar $((K, \bar{\tau}), i) =$ Ker (f, g) în **Top**.

Dacă (p, L) este un conucleu în **Ens** al cuplului subiacent (f, g) și dacă pe $L = Y / \overline{R}$ (f, g) o înzestrăm cu topologia cât $\bar{\sigma}$, atunci $p : (Y, \sigma) \to (L, \bar{\sigma})$ este continuă și $(p, (L, \bar{\sigma})) =$ Coker (f, g) în **Top**.

3. Dacă notăm prin **Ens*** subcategoria lui **Ens** formată din mulțimile nevide iar $f, g : X \to Y$ sunt morfisme în **Ens*** a.î. $\{x \in X \,/\, f(x) = g(x)\} = \emptyset$, deducem că în **Ens*** nu există Ker (f, g).

4. Fie $f, g : G \to G'$ un cuplu de morfisme din **Gr**, (K, i) = =Ker (f, g) în **Ens**, H subgrupul normal al lui G' generat de elementele de forma $f(x)\,(g(x))^{-1}$, cu $x \in \cancel{X}$ G iar $p : \cancel{X}$ G $\to G'/H$ morfismul surjectiv canonic de grupuri.

Atunci:

(i) $K \leq G$, iar (K, i) = Ker (f, g) în **Gr**

(ii) (p, G′ / H) = Coker (f, g) în **Gr**.

Concluzie: **Categoria Gr posedă nuclee și conuclee.**

Cum **Gr** este categorie cu obiect nul, dacă $f : G \to G'$ este morfism în **Gr**, atunci $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f, \mathbf{O}_{G'G}) = \{x \in G \,/\, f(x) = o\}$ (o este elementul neutru al lui G′!).

5. Fie $f, g : G \to G'$ un cuplu de morfisme în **Ab** și $h = fg^{-1}$, $h : G \to G'$, $h(x) = f(x)\, g(x)^{-1}$, oricare ar fi $x \in G$ (evident, h este morfism în **Ab**).

Atunci:

(i) Dacă K = Ker (h) iar $i : K \to G$ este morfismul incluziune, atunci (K, i) = Ker (f, g) în **Ab**.

(ii) Dacă H = Im (h) iar $p : G' \to G' / H$ este morfismul surjectiv canonic, atunci (p, G′ / H) = Coker (f, g) în **Ab**.

Concluzie: **Categoria Ab posedă nuclee și conuclee.**

6. Fie $f, g : A \to A'$ un cuplu de morfisme în categoria $\mathbf{Ann}_C$ (a inelelor comutative unitare), (K, i) = Ker (f, g) în **Ens** (în mod evident K este subinel al lui A iar i este morfism de inele unitare) iar **a** este idealul lui A′ generat de elementele de forma f (x) - g (x), cu $x \in A$. Dacă notăm cu $p : A' \to A' / \mathbf{a}$ morfismul surjectiv canonic, atunci:

(i) (K, i) = Ker (f, g) în $\mathbf{Ann}_C$

(ii) (p, A′ / a) = Coker (f, g) în $\mathbf{Ann}_C$.

Concluzie: $\mathbf{Ann}_C$ **posedă nuclee și conuclee.**

7. Fie $f, g : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ un cuplu de morfisme din **Pre** (respectiv **Ord**) iar (K, i) = Ker (f, g) în **Ens**.

Atunci, dacă mulțimea K este înzestrată cu preordinea (respectiv ordinea) indusă de cea a lui X, atunci i este morfism în **Pre** și (K, i)= = Ker (f, g) în **Pre** (resp. **Ord**).

8. Fie $f, g : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ un cuplu de morfisme din **Pre** (respectiv **Ord**) iar (p, Z) = Coker (f, g) în **Ens**.

Atunci:

(i) Dacă pe Z considerăm relația de preordine $\hat{y} \leq' \hat{y'}$ $\Leftrightarrow$ există $y_0, \ldots, y_{n-1}, y_1', \ldots, y_n'$ în Y a.î. $\hat{y_0} = \hat{y}$, $\hat{y_n'} = \hat{y'}$, $\hat{y_i} = \hat{y_i'}$ pentru $1 \leq i \leq n-1$ și $y_0 \leq y_1'$, $y_1 \leq y_2'$, ..., $y_{n-1} \leq y_n'$, atunci $p : (Y, \leq) \to (Z, \leq')$ este izotonă iar (p, Z) = Coker (f, g) în **Pre**.

(ii) Dacă X, Y sunt mulțimi ordonate iar $\overline{Z}$ este mulțimea ordonată asociată lui Z (adică $\overline{Z} = Z/\sim$, *unde* $z \sim z'$ $\Leftrightarrow$ $z \leq z'$ și $z' \leq z$) și $p_Z : Z \to \overline{Z}$ este aplicația izotonă surjectivă canonică, atunci $(p_Z, \overline{Z})$ = Coker (f, g) în **Ord**.

Concluzie: Categoriile Pre și Ord posedă nuclee și conuclee.

Observația 2.16. Dacă **C** posedă un obiect nul **O** iar $f : X \to Y$ este un morfism în **C**, definim *nucleul* lui f notat Ker (f) ca fiind Ker (f, $\mathbf{O}_{YX}$) (evident dacă există), unde, reamintim că $\mathbf{O}_{YX} : X \to Y$ este morfismul nul de la X la Y.

§ 3. Functori. Exemple. Functori remarcabili. Morfisme functoriale. Categorii echivalente. Duala lui Ens

Definiția 3.1. Dacă C, C′ sunt două categorii, vom spune că s-a definit un functor ***covariant (contravariant)*** **F de la C la C′ (vom scrie $F : C \to C'$) dacă:**

i) Pentru orice obiect $X \in C$ s-a definit un obiect unic F(X) $\in C'$

ii) Pentru orice pereche (X, Y) de obiecte din C și orice f $\in C(X, Y)$ s-a definit un morfism unic $F(f) \in C'(F(X), F(Y))$ ($F(f) \in C'(F(Y), F(X))$) a.î.

a) $F(1_X) = 1_{F(X)}$ pentru orice $X \in C$

b) Pentru oricare două morfisme f și g din C pentru care compunerea gf are sens, atunci și F (g) F (f) (F (f) F (g)) are sens și în plus F (gf) = F (g) F (f) (F (gf) = F (f) F (g)).

Observația 3.2.

1. Dacă $F : C \to C'$ este un functor covariant (contravariant) iar u este un morfism secționabil în C având ca secțiune pe s, atunci F (u) este morfism secționabil (retractabil în C′) având pe F (s) drept secțiune (retractă). Un rezultat analog este valabil în cazul în care u este retractabil în C.

În particular, dacă u este izomorfism în **C**, atunci F (u) este izomorfism în **C′** iar $(F(u))^{-1} = F(u^{-1})$. Deci, F conservă morfismele secționabile, retractabile și izomorfismele. De asemenea, F conservă morfismele identice și diagramele comutative.

2. Oricărui functor contravariant $F : \mathbf{C}^0 \to \mathbf{C}'$ îi corespunde un functor covariant $\overline{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$, unde $\overline{F}(X) = F(X)$, pentru orice $X \in \mathbf{C}^0$ iar pentru orice $u^0 : X \to Y$ în $\mathbf{C}^0$ (deci pentru orice $u : Y \to X$ din **C**), $\overline{F}(u^0) = F(u) : F(X) \to F(Y)$. Analog se arată că oricărui functor contravariant $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'^{\,0}$ îi corespunde un functor covariant $\overline{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$.

Exemple

1. Dacă **C** este o categorie oarecare, atunci $1_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, definită astfel: $1_{\mathbf{C}}(X) = X$, pentru orice $X \in \mathbf{C}$ și $1_{\mathbf{C}}(u) = u$ pentru orice morfism u din **C**, este un functor covariant (numit functorul *identic* al lui **C**).

2. Mai general, dacă **C′** este o subcategorie a lui **C**, atunci $1_{\mathbf{C},\mathbf{C}'} : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ definit astfel: $1_{\mathbf{C},\mathbf{C}'}(X) = X$, pentru orice $X \in \mathbf{C}'$ și $1_{\mathbf{C},\mathbf{C}'}(u) = u$ pentru orice morfism u din **C′**, este functor covariant (numit functorul *incluziune*).

3. Dacă **C** este o categorie, atunci $F : \mathbf{C}^0 \times \mathbf{C} \to \mathbf{Ens}$ definit astfel $F(X, Y) = \mathbf{C}(X, Y)$ iar dacă $(u, u') : (X, Y) \to (X', Y')$ este un morfism din $\mathbf{C}^0 \times \mathbf{C}$, atunci $F(u, u') : \mathbf{C}(X, Y) \to \mathbf{C}(X', Y')$ este funcția $f \to u'fu$, este un functor covariant (notat prin **Hom**).

4. Fie **C** o categorie iar A un obiect fixat al lui **C**. Se definește functorul covariant $h^A : \mathbf{C} \to \mathbf{Ens}$ astfel: dacă $M \in \mathbf{C}$, atunci $h^A(M) = \mathbf{C}(A, M)$ iar dacă $u : M \to N$ este un morfism din **C**, atunci $h^A(u) : h^A(M) \to h^A(N)$ se definește prin $h^A(u)(f) = uf$, pentru orice $f \in h(M)$.

Putem defini și functorul contravariant $h_A : \mathbf{C} \to \mathbf{Ens}$ astfel $h_A(M) = \mathbf{C}(M, A)$, pentru orice $M \in \mathbf{C}$ și pentru $u : M \to N$ morfism în **C**, $h_A(u) : h_A(N) \to h_A(M)$, $h_A(u)(f) = fu$, pentru orice $f \in h_A(N)$.

Definiția 3.3. Dacă C, C′, C″ sunt trei categorii iar $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$, $G : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}''$ sunt functori (covarianți sau contravarianți), atunci definind $GF : \mathbf{C} \to \mathbf{C}''$ prin $(GF)(M) = G(F(M))$, pentru orice $M \in \mathbf{C}$ și $(GF)(u) = G(F(u))$ pentru orice morfism u din C, obținem un nou functor GF de la C la C″ numit *compusul* lui G cu F. Evident, dacă F și G sunt covarianți (contravarianți), atunci GF este covariant, pe când dacă F este covariant iar G este contravariant (sau invers), atunci GF este contravariant.

Definiția 3.4. Fie C, C′ două categorii iar $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ doi functori covarianți (contravarianți). Vom spune că s-a dat un *morfism functorial* φ de la F la G (vom scrie $\varphi : F \to G$ sau $F \xrightarrow{\varphi} G$) dacă pentru orice $M \in \mathbf{C}$ s-a dat un morfism $\varphi(M) : F(M) \to G(M)$ a.î. dacă $u : M \to N$ este un morfism oarecare din C, atunci diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{\varphi(M)} & G(M) \\ {\scriptstyle F(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(u)} \\ F(N) & \xrightarrow[\varphi(N)]{} & G(N) \end{array} \qquad \text{respectiv} \qquad \begin{array}{ccc} F(N) & \xrightarrow{\varphi(N)} & G(N) \\ {\scriptstyle F(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(u)} \\ F(M) & \xrightarrow[\varphi(M)]{} & G(M) \end{array}$$

este comutativă. Vom scrie $\varphi = (\varphi(M))_{M \in \mathbf{C}}$ și vom spune că morfismul functorial φ are *componentele* φ (M), $M \in \mathbf{C}$.

Dacă pentru orice $M \in \mathbf{C}$, φ (M) este izomorfism în C′, vom spune că φ este *izomorfism functorial* de la F la G (în acest caz vom spune că F și G sunt *izomorfi* și vom scrie $F \approx G$).

Observația 3.5. Vom nota prin $1_F : F \to F$ morfismul functorial de componente $1_F(M) = 1_{F(M)} : F(M) \to F(M)$. Evident, 1_F este izomorfism functorial (numit morfismul functorial *identic* al lui F).

Pe parcursul acestei lucrări vom pune în evidență mai multe exemple de morfisme functoriale.

Definiția 3.6. Fie F, G, H trei functori covarianți de la categoria C la categoria C′ și $F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H$ două morfisme functoriale. Dacă pentru orice $M \in C$, definim $\theta(M) = \psi(M)\varphi(M)$, obținem în felul acesta un morfism functorial θ (notat ψφ) numit *compusul* morfismelor functoriale ψ și φ.

Analog se definește compunerea a două morfisme functoriale în cazul când F, G și H sunt contravarianți.

Propoziția 3.7. Fie F, G doi functori covarianți (contravarianți) de la categoria C la categoria C′ iar $F \xrightarrow{\varphi} G$ un morfism functorial. Atunci φ este izomorfism functorial dacă și numai dacă există $G \xrightarrow{\psi} F$ un morfism functorial, unic, a.î. $\psi\varphi = 1_F$ și $\varphi\psi = 1_G$ (în care caz vom scrie $\psi = \varphi^{-1}$).

Demonstrație. Presupunem că φ este un izomorfism functorial. Atunci, dacă $M \in C$, $\varphi(M) : F(M) \to G(M)$ este un izomorfism în C′, deci putem considera morfismul $\psi(M) = (\varphi(M))^{-1} : G(M) \to F(M)$. Familia de morfisme $\{\psi(M)\}_{M \in C}$ determină un morfism functorial $\psi : G \to F$.

Într-adevăr, fie $u : M \to N$ un morfism în categoria C. Avem următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{\varphi(M)} & G(M) \\ {\scriptstyle F(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(u)} \\ F(N) & \xrightarrow[\varphi(N)]{} & G(N) \end{array}$$

adică $\varphi(N)F(u) = G(u)\varphi(M)$, de unde rezultă că $F(u)\varphi(M)^{-1} = \varphi(N)^{-1}G(u)$ sau $F(u)\psi(M) = \psi(N)G(u)$, ceea ce ne arată că ψ este un morfism functorial; este clar că $\psi\varphi = 1_F$ și $\varphi\psi = 1_G$.

Afirmația inversă este evidentă. ■

Definiția 3.8. Fie C, C′ două categorii iar $F : C \to C'$ un functor covariant. Vom spune că:

i) F este *fidel (cofidel, deplin fidel)* dacă pentru orice $X, Y \in C$, aplicația $F(X, Y) : C(X,Y) \to C'(F(X), F(Y))$ este injecție (surjecție, bijecție)

ii) F este *monofunctor* dacă pentru orice $X, Y \in C$ a.î. $F(X) = F(Y)$, rezultă $X = Y$

iii) F este *epifunctor* dacă pentru orice $X' \in C'$ există cel puțin un $X \in C$ a.î. $F(X) = X'$

iv) F este *bijectiv*, dacă este simultan monofunctor și epifunctor

v) F este *conservativ* dacă avem echivalenta: F (f) este izomorfism în C′ dacă și numai dacă f este izomorfism în C

vi) Functorul F se numește *izomorfism* de categorii dacă este simultan deplin fidel și bijectiv

vii) F este o *echivalență de categorii* dacă există un functor covariant $G : C' \to C$ a.î. $GF \approx 1_C$ și $FG \approx 1_{C'}$; în acest caz spunem despre categoriile C și C′ că sunt *echivalente* iar F și G sunt unul *quasi-inversul* celuilalt.

Observația 3.9.

1. Fie $F : C \to C'$ un functor covariant, $X, Y \in$ **Ob** (C), $f \in C(X, Y)$ și $g \in C(Y, X)$. Atunci:

a) Dacă F este fidel, atunci F (g) este o secțiune (retracție) a lui F (f) dacă și numai dacă g este o secțiune (retracție) a lui f.

b) Dacă F este deplin fidel, atunci f este secționabil (retractabil) dacă și numai dacă F (f) este secționabil (retractabil).

Într-adevăr, dacă g este o secțiune a lui f (adică $fg = 1_Y$), atunci $F(f)F(g) = F(fg) = F(1_Y) = 1_{F(Y)}$, adică F (g) este o secțiune a lui F (f). Reciproc, dacă F (g) este o secțiune a lui F (f) (adică $F(f)F(g) = 1_{F(Y)}$), atunci $F(fg) = F(1_Y)$, deci $fg = 1_Y$ (căci F este fidel). Restul se probează analog.

2. Din observația de mai înainte, deducem că orice functor deplin fidel este conservativ.

3. Orice izomorfism de categorii este o echivalență de categorii, reciproca nefiind adevărată.

Teorema 3.10. Fie $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ două categorii iar $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ un functor covariant. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) F este o echivalență de categorii

(ii) F este deplin fidel și pentru orice $X' \in \mathbf{C}'$ există cel puțin un obiect $X \in \mathbf{C}$ a.î. $F(X) \approx X'$.

Demonstrație. (i) $\Rightarrow$ (ii). Presupunem deci că F este echivalență de categorii, adică există $G : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ un functor covariant a.î. $GF \overset{\varphi}{\approx} 1_{\mathbf{C}}$ și $FG \overset{\psi}{\approx} 1_{\mathbf{C}'}$.

Fie acum $M, N \in \mathbf{C}$ și să demonstrăm că aplicația $\mathbf{C}(M, N) \to \mathbf{C}'(F(M), F(N))$, $f \to F(f)$ este bijecție. Pentru aceasta fie $f, f' \in \mathbf{C}(M, N)$ a.î. $F(f) = F(f')$.

Din ipoteză avem două izomorfisme functoriale $\varphi : GF \to 1_{\mathbf{C}}$ și $\psi : FG \to 1_{\mathbf{C}'}$. Perechea de morfisme f, f' conduce la perechea de morfisme $F(M) \underset{F(f')}{\overset{F(f)}{\rightrightarrows}} F(N)$ iar aceasta la $G(F(M)) \underset{G(F(f'))}{\overset{G(F(f))}{\rightrightarrows}} G(F(N))$.

Cum $F(f) = F(f')$, rezultă că $G(F(f)) = G(F(f'))$.

Considerăm acum următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{tikzcd}
(GF)(M) \arrow[r, "\varphi(M)"] \arrow[d, shift right, "(GF)(f)"'] \arrow[d, shift left, "(GF)(f')"] & M \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "f'"] \\
(GF)(N) \arrow[r, "\varphi(N)"'] & N
\end{tikzcd}$$

Din $f\,\varphi(M) = \varphi(N)(GF)(f)$ și $f'\,\varphi(M) = \varphi(N)(GF)(f')$ și din faptul că φ este izomorfism functorial (adică toate componentele sale sunt izomorfisme), deducem că $f = f'$, adică F este fidel.

Pentru a proba că F este cofidel, fie $f' \in \mathbf{C}'(F(M), F(N))$.

Atunci $G(f') : G(F(M)) \to G(F(N))$ și vom considera diagrama

$$\begin{tikzcd}
(GF)(M) \arrow[r, "\varphi(M)"] \arrow[d, "G(f')"'] & M \arrow[d, dashed, "f"] \\
(GF)(N) \arrow[r, "\varphi(N)"'] & N
\end{tikzcd}$$

și definim $f \in \mathbf{C}(M, N)$ prin $f = \varphi(N)\,G(f')\,\varphi(M)^{-1}$ (lucru posibil deoarece $\varphi(M)$ este izomorfism).

Vrem să demonstrăm că $F(f) = f'$. Din egalitățile $f\,\varphi(M) = \varphi(N)(GF)(f)$ și $f\,\varphi(M) = \varphi(N)\,G(f')$, deducem că $\varphi(N)(GF)(f) = \varphi(N)G(f') \Leftrightarrow G(F(f)) = G(f')$. Cum G la rândul său este echivalență de categorii deducem (ca mai sus) că G este functor fidel, adică $F(f) = f'$.

Am probat până aici că F este deplin fidel.

Pentru a proba în întregime implicația, fie $X' \in \mathbf{C}'$ și să notăm $X = G(X')$. Avem $F(X) = F(G(X')) = (FG)(X') \overset{\psi(X')}{\approx} X'$ ($\psi(X')$ fiind izomorfism).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Să demonstrăm la început că dacă F este deplin fidel și $F(X) \approx F(Y)$, atunci $X \approx Y$. Într-adevăr, avem $\bar{f} : F(X) \to F(Y)$ și $\bar{g} : F(Y) \to F(X)$ a.î. $\bar{g}\bar{f} = 1_{F(X)}$ și $\bar{f}\bar{g} = 1_{F(Y)}$. Cum F este presupus deplin fidel, există $f : X \to Y$ și $g : Y \to X$ a.î. $F(f) = \bar{f}$ și $F(g) = \bar{g}$. Din $\bar{g}\bar{f} = 1_{F(X)}$ deducem că $F(g)F(f) = 1_{F(X)} \Rightarrow F(gf) = F(1_X)$ iar cum F este fidel, deducem că $gf = 1_X$. Analog deducem că $fg = 1_Y$, de unde rezultă $X \approx Y$.

Să trecem acum la demonstrarea efectivă a implicației (ii) $\Rightarrow$ (i).

Pentru aceasta fie $Y \in \mathbf{C}'$; din ipoteză avem că există $X_Y \in \mathbf{C}$

a.î. $Y \approx F(X_Y)$. Cum clasa morfismelor este o mulțime, cu ajutorul axiomei alegerii putem găsi un izomorfism $\psi(Y) : F(X) \to Y$.

Analog, dacă $Y' \in \mathbf{C}'$, atunci există un izomorfism $\psi(Y'):F(X_{Y'}) \to Y'$.

Fie acum $g : Y \to Y'$ un morfism din $\mathbf{C}'$.

Considerăm diagrama din $\mathbf{C}'$:

$$\begin{tikzcd} F(X_Y) \arrow[r, "\psi(Y)"] & Y \arrow[d, "g"] \\ F(X_{Y'}) \arrow[r, "\psi(Y')"'] & Y' \end{tikzcd}$$

și definim $\bar{g} : F(X_Y) \to F(X_{Y'})$ prin $\bar{g} = \psi(Y')^{-1}\, g\, \psi(Y)$. Cum F este presupus deplin fidel (deci cofidel), există $f : X_Y \to X_{Y'}$, a.î. $F(f)=\bar{g}$.

Avem deci următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{tikzcd} F(X_Y) \arrow[r, "\psi(Y)"] \arrow[d, "F(f)"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ F(X_{Y'}) \arrow[r, "\psi(Y')"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Definim atunci $G : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ prin $G(Y) = X_Y$ și $G(g) = f$ și să probăm că G este functor covariant iar $FG \approx 1_{\mathbf{C}'}$ și $GF \approx 1_{\mathbf{C}}$.

Dacă $g' : Y' \to Y''$ este un alt morfism din $\mathbf{C}'$, atunci analog ca mai sus există $f' : X_{Y'} \to X_{Y''}$ a.î. $G(g') = f'$.

Din diagrama:

$$\begin{tikzcd} F(X_Y) \arrow[r, "\psi(Y)"] \arrow[d, "F(f)"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ F(X_{Y'}) \arrow[r, "\psi(Y')"] \arrow[d, "F(f')"'] & Y' \arrow[d, "g'"] \\ F(X_{Y''}) \arrow[r, "\psi(Y'')"] & Y'' \end{tikzcd}$$

deducem că lui $g'g$ îi corespunde $F(f'f)$, de unde rezultă că $G(g'g) = f'f = G(g')\,G(g)$ (căci din $g\,\psi(Y) = \psi(Y')\,F(f)$ și $g'\,\psi(Y') = \psi(Y'')\,F(f')$ deducem imediat că $(g'g)\,\psi(Y) = \psi(Y'')\,F(f'f)$. Cum și $G(1_Y) = 1_{X_Y} = 1_{G(Y)}$, deducem că G este functor covariant.

Deducem imediat că $FG \approx 1_{\mathbf{C}'}$ (căci $F(G(Y)) = F(X_Y)$ iar $F(X_Y) \overset{\psi(Y)}{\approx} Y$). Faptul că ψ este morfism functorial rezultă imediat din studiul ultimei diagrame.

De la GF la $1_{\mathbf{C}}$ construim morfismul φ astfel: Dacă $X \in \mathbf{C}$, atunci $F(X) \in \mathbf{C}'$ și conform ipotezei există $X_F \in \mathbf{C}$ a.î. $F(X_F) \approx F(X)$.

Conform observației de la început, $X_F \overset{\varphi(X)}{\approx} X$. Se verifică acum simplu că φ este morfism functorial și că $GF \approx 1_{\mathbf{C}}$. Cu aceasta, teorema este demonstrată. ■

Observația 3.11. În general un functor nu păstrează monomorfismele sau epimorfismele. Într-adevăr, dacă $\mathbf{C}$ este o categorie oarecare ce are cel puțin două obiecte distincte X și Y și un morfism $u : X \to Y$ ce nu este nici monomorfism și nici epimorfism în $\mathbf{C}$, considerăm subcategoria $\mathbf{C}'$ a lui $\mathbf{C}$ ce are drept obiecte pe X și Y iar morfisme pe 1_X, 1_Y și u și fie $1_{\mathbf{C}',\mathbf{C}} : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ functorul incluziune. Cum u este bimorfism în $\mathbf{C}'$ iar în $\mathbf{C}$, $1_{\mathbf{C}',\mathbf{C}}(u) = u$ nu este nici monomorfism și nici epimorfism rezultă concluzia la care doream să ajungem.

Definiția 3.12. Fie C, C′ două categorii iar $T : C \to C'$ un functor contravariant. Vom spune că T este o *dualitate de categorii*, dacă există un functor contravariant $S : C' \to C$ a.î. $TS \approx 1_{C'}$ și $ST \approx 1_C$.

Observația 3.13. În conformitate cu definiția de mai sus, a arăta că $C^0 \approx C'$ (în sensul Definiției 3.8., (vii)), revine la a găsi doi functori contravarianți $T : C \to C'$ și $S : C' \to C$ a.î. $TS \approx 1_{C'}$ și $ST \approx 1_C$.

Ca aplicație, să caracterizăm *categoria duală a lui Ens*:

Definiția 3.14. Numim *latice normală* o latice $L \in L\,(0, 1)$, sup-completă ce verifică axioma:

N) Pentru orice $x, y \in L$, cu $x < y$, există un atom $z \in L$ a.î. $x < x \vee z \leq y$.

Dacă L, L′ sunt latici normale, $f : L \to L'$ se zice *morfism de latici normale*, dacă $f \in L\,(0, 1)\,(L, L')$ și $f\,(\sup A) = \sup f\,(A)$, pentru orice submulțime A a lui L.

Vom nota prin **Lnr** categoria laticilor normale.

Teorema 3.15. Categoria duală a lui Ens este echivalentă cu Lnr (adică $Ens^0 \approx Lnr$).

Demonstrație. Pentru a proba că $\mathbf{Ens}^0 \approx \mathbf{Lnr}$, vom construi doi functori contravarianți $P : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Lnr}$ și $a : \mathbf{Lnr} \to \mathbf{Ens}$ (notațiile sunt consacrate) a.î. $aP \approx 1_{\mathbf{Ens}}$ și $Pa \approx 1_{\mathbf{Lnr}}$.

Pentru fiecare mulțime X vom considera mulțimea P (X) a submulțimilor lui X iar pentru fiecare aplicație $f : X \to Y$, aplicația $f^{-1} : P\,(Y) \to P\,(X)$. Se constată ușor că pentru orice $X \in \mathbf{Ens}$, $P(X) \in \mathbf{Lnr}$ iar $f^{-1} : P\,(Y) \to P\,(X)$ este morfism de latici normale, obținându-se astfel prin asocierile $X \to P\,(X)$ și $f \to f^{-1}$ un functor contravariant $P : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Lnr}$.

Pentru a defini functorul **a**, fie $L \in \mathbf{Lnr}$ iar **a** (L) mulțimea atomilor lui L.

Vrem să demonstrăm că $\sup \mathbf{a}\,(L) = \mathbf{1}$. Să presupunem prin absurd că $\sup \mathbf{a}\,(L) < \mathbf{1}$; conform axiomei (N), există $x \in \mathbf{a}\,(L)$ a.î. $\sup \mathbf{a}\,(L) < x \vee \sup \mathbf{a}\,(L) \leq \mathbf{1}$, de unde deducem că $x \notin \mathbf{a}\,(L)$ - absurd!

Fie $f : L \to L'$ un morfism în **Lnr** și să observăm că pentru fiecare $y \in \mathbf{a}\,(L')$ există un unic element $x \in \mathbf{a}\,(L)$ a.î. $y \leq f\,(x)$.

Într-adevăr, pentru existență, să presupunem prin absurd că există $y \in L'$ a.î. pentru orice $x \in L$ să avem $f\,(x) < y$. În aceste condiții, deducem că $y \leq \mathbf{1} = f\,(\mathbf{1}) = f\,(\sup \mathbf{a}\,(L)) = \sup f\,(\mathbf{a}\,(L))$ și cum $y \wedge f\,(x) = \mathbf{0}$ pentru orice $x \in \mathbf{a}\,(L) \Rightarrow y \wedge \sup f\,(\mathbf{a}\,(L)) = y \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$, ceea ce este absurd.

În privința unicității, să presupunem că pentru $y \in \mathbf{a}\,(L')$, există $x, x' \in \mathbf{a}\,(L)$, $x \neq x'$ a.î. $y \leq f\,(x)$ și $y \leq f\,(x')$. Deducem imediat că $y \leq f\,(x) \wedge f\,(x') = f\,(x \wedge x') = f\,(0) = \mathbf{0}$, deci $y = \mathbf{0}$, absurd!

Cele stabilite mai sus ne permit să definim $\mathbf{a}\,(f) : \mathbf{a}\,(L') \to \mathbf{a}\,(L)$ prin $\mathbf{a}\,(f)\,(y) = x$, unde $y \in \mathbf{a}\,(L')$ iar $x \in \mathbf{a}\,(L)$ este unicul element cu proprietatea că $y \leq f\,(x)$.

Pentru a proba că **a** este functor contravariant, să considerăm morfismele de latici normale $L \xrightarrow{f} L' \xrightarrow{g} L''$ și să probăm că $\mathbf{a}\,(gf) = \mathbf{a}\,(f)\,\mathbf{a}\,(g)$ (egalitatea $\mathbf{a}\,(1_L) = 1_{\mathbf{a}(L)}$ fiind evidentă).

Pentru aceasta fie $y \in \mathbf{a}\,(L'')$ și $\mathbf{a}\,(gf)\,(y) = x$, unde $x \in L$ iar $y \leq (gf)\,(x) = g\,(f\,(x))$.

Să notăm $\mathbf{a}\,(g)\,(y) = z$ (adică $z \in L'$ și $y \leq g\,(z)$).

Dacă $\mathbf{a}(f)(z) = x'$ (cu $x' \in L$ și $z \leq f\,(x')$), atunci $\mathbf{a}(f)(\mathbf{a}(g)(y)) = \mathbf{a}(f)(z) = x'$ și cum $y \leq g(z) \leq g(f(x')) = (gf)\,(x')$ deducem că $x = x'$, adică $\mathbf{a}(gf)(y) = \mathbf{a}(f)(\mathbf{a}(g)(y))$, deci $\mathbf{a}(gf) = \mathbf{a}(f)\mathbf{a}(g)$.

Astfel, asocierile $L \to \mathbf{a}\,(L)$ și $f \to \mathbf{a}\,(f)$ definesc un functor contravariant $\mathbf{a} : \mathbf{Lnr} \to \mathbf{Ens}$.

Pentru a proba că $\mathbf{Ens}^0 \approx \mathbf{Lnr}$ vom proba izomorfismele functoriale $\mathbf{a}P \approx 1_{\mathbf{Ens}}$ și $P\mathbf{a} \approx 1_{\mathbf{Lnr}}$. Izomorfismul $\mathbf{a}P \approx 1_{\mathbf{Ens}}$ este evident (deoarece atomii lui P(X) sunt exact elementele lui X iar dacă $f : X \to Y$ este o aplicație oarecare, atunci $\mathbf{a}\,(f^{-1})\,(x) = f\,(x)$ pentru orice $x \in X$, adică $(\mathbf{a}P)\,(f) = f$.

Pentru a proba izomorfismul $\mathbf{Pa} \approx 1_{\mathbf{Lnr}}$, vom considera aplicațiile $\alpha : L \to \mathbf{Pa}(L)$ și $\beta : \mathbf{Pa}(L) \to L$, cu $L \in \mathbf{Lnr}$, definite astfel: pentru $y \in L$, $\alpha(y) = \{x / x \in \mathbf{a}(L),\ x \le y\}$ iar dacă $A \in \mathbf{Pa}(L)$, atunci $\beta(A) = \sup(A)$. Este ușor de probat că α și β sunt morfisme de latici normale.

Să probăm acum egalitățile $\alpha\beta = 1_{\mathrm{Pa}(L)}$ și $\beta\alpha = 1_L$.

Pentru prima egalitate, fie $A = \{x_i / x_i \in \mathbf{a}(L),\ i \in I\}$ iar pentru un atom $x \le \beta(A) = \sup(A)$, $x = \mathbf{0}$ sau $x = x_{i_0}$ pentru un $i_0 \in I$.

Dacă notăm $y_i = x \wedge x_i$, vom avea $y_i = \mathbf{0}$ pentru orice $i \in I$ sau nu există un indice $i_0 \in I$, a.î. $x_{i_0} = x$.

Dacă $y_i = \mathbf{0}$ pentru orice $i \in I$, vom avea $\mathbf{0} = \sup\limits_L \{y_i\} = \sup\limits_i \{x \wedge x_i\} = x \wedge \sup\limits_i \{x_i\} = x$, ceea ce este fals. Deci există $i \in I$, cu $x = x_i$ adică $x \in A$, de unde egalitatea $\alpha\beta(A) = A$.

Pentru $y \in L$, $\alpha(y) \neq \mathbf{0}$ și $\beta\alpha(y) = \sup \alpha(y) \le y$. Dacă presupunem că $\sup(\mathbf{a}(y)) < y$, atunci există un atom $x \in \mathbf{a}(L)$ a.î. $x \notin \alpha(y)$ și $\sup \alpha(y) \vee x \le y$, deci $x \le y$ - absurd, deci $\beta\alpha(y) = y$. Cum și $\beta\alpha(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, deducem că și a doua egalitate este adevărată.

Cu aceasta teorema este complet demonstrată. ■

§ 4. Functori reprezentabili. Functori adjuncți

Fie $\mathbf{C}$ o categorie oarecare, $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Ens}$ un functor covariant, $X \in \mathbf{C}$ și (h^X, F) clasa morfismelor functoriale de la functorul h^X la functorul F. Considerăm aplicația canonică $\alpha = \alpha(F, X) : (h^X, F) \to F(X)$, $\alpha(\varphi) = \varphi(X)(1_X)$ pentru orice $\varphi \in (h^X, F)$.

Lema 4.1. (***Yoneda - Grothendieck***). **Aplicația α este bijectivă și functorială în F și X.**

Demonstrație. Vom construi o altă aplicație $\beta : F(X) \to (h^X, F)$, despre care vom arăta că este inversa lui α.

Într-adevăr, pentru $x \in F(X)$ și $Y \in \mathbf{C}$ considerăm morfismul $\beta^x(Y) : h^X(Y) \to F(Y)$, $\beta^x(Y)(f) = F(f)(x)$, pentru orice $f \in \mathbf{C}(X,Y)$ din **Ens**.

Morfismele $(\beta^x(Y))_{Y \in C}$ sunt componentele unui morfism functorial $\beta^x : h^X \to F$.

Pentru aceasta fie $Z \in \mathbf{C}$, $g \in \mathbf{C}(Y, Z)$ și diagrama:

$$\begin{array}{ccc} h^X(Y) & \xrightarrow{\beta^x(Y)} & F(Y) \\ {\scriptstyle h^X(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(g)} \\ h^X(Z) & \xrightarrow{\beta^x(Z)} & F(Z) \end{array}$$

Dacă $f \in h^X(Y) = \mathbf{C}(X, Y)$, atunci $(F(g)\ \beta^x(Y))(f) = (F(g)F(f))(x) = F(gf)(x) = \beta^x(Z)(gf) = (\beta^x(Z))(h^X(g))(f)$, adică diagrama este comutativă, deci β^x este morfism functorial de la h^X la F, altfel zis, β este corect definită.

Pentru a proba că β este inversa lui α, să arătăm că $\beta\alpha = 1_{(h^X,F)}$ și $\alpha\beta = 1_{F(X)}$.

Într-adevăr, fie $\varphi \in (h^X, F)$. Avem $(\beta\alpha)(\varphi) = \beta(\alpha(\varphi)) = \beta(\varphi(X)(1_X)) = \beta^x$ (unde $x = \varphi(X)(1_X) \in F(X)$). Deoarece pentru orice $Y \in \mathbf{C}$ și $f \in \mathbf{C}(X, Y)$, diagrama

$$\begin{array}{ccc} h^X(X) & \xrightarrow{h^X(f)} & h^X(Y) \\ {\scriptstyle \varphi(X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi(Y)} \\ F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \end{array}$$

este comutativă, deducem că $\beta^x(Y)(f) = F(f)(x) = F(f)(\varphi(X)(1_X)) = (\varphi(Y)\, h^X(f)(1_X) = \varphi(Y)(f)$, de unde deducem că $\beta^x = \varphi$, adică $(\beta\alpha)(\varphi) = \varphi \Rightarrow \beta\alpha = 1_{(h^X,F)}$.

Reciproc, dacă $x \in F(X)$, atunci $(\alpha\beta)(x) = \alpha(\beta^x) = \beta^x(X)(1_X) = F(1_X)(x) = 1_{F(X)}(x) = x$, adică $\alpha\beta = 1_{F(X)}$.

Deoarece pentru orice $f \in C(X,Y)$, $\varphi \in (h^X,F)$ și $G : C \to$ **Ens** functor covariant se arată ușor ca diagramele:

$$\begin{array}{ccc} (h^X, F) & \xrightarrow{\alpha(F,X)} & F(X) \\ \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ (h^Y, F) & \xrightarrow{\alpha(F,Y)} & F(Y) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} (h^X, F) & \xrightarrow{\alpha(F,X)} & F(X) \\ \downarrow{\scriptstyle\rho} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi(X)} \\ (h^X, G) & \xrightarrow{\alpha(G,X)} & G(X) \end{array}$$

sunt comutative (unde θ, ρ se definesc prin compunerea la stânga, respectiv dreapta, a lui $h^f : h^X \to h^Y$ cu φ), deducem functorialitatea lui α în F și X. ■

Observația 4.2.

1. Dacă $F : C \to$ **Ens** este contravariant, atunci pentru orice $X \in C$, aplicația canonică $\alpha(F, X) : (h_X, F) \to F(X)$ $(\varphi \to \varphi(X)(1_X))$ este bijectivă și functorială în F și X (inversa sa $\beta : F(X) \to (h_X, F)$, $x \to \beta_X$ definindu-se analog).

2. Lema precedentă ne asigură că (h^X, F) ca și (h_X, F) sunt mulțimi.

Definiția 4.3. Vom spune că functorul covariant $F : C \to$ Ens este *reprezentabil* dacă există o pereche (X,x) (cu $X \in C$ și $x \in F(X)$) a.î. morfismul functorial $\beta^x : h^X \to F$ (ce corespunde lui x prin lema Yoneda-Grothendieck) să fie izomorfism functorial.

Perechea (X, x) poartă numele de *pereche de reprezentare* pentru F.

Observația 4.4. În mod dual, functorul contravariant $F : C \to$ **Ens** se numește *coreprezentabil* dacă există $X \in C$, $x \in F(X)$ a.î. morfismul functorial $\beta_x : h_X \to F$ să fie izomorfism functorial.

Deoarece orice functor contravariant $F : C \to$ **Ens** se poate considera ca un functor covariant de la C^0 la **Ens**, în cele ce urmează vom considera numai functori reprezentabili.

Fie **C**, **C'** două categorii iar $T : C \to C'$, $S : C' \to C$ doi functori covarianți. Vom defini doi noi functori covarianți $\overline{T}, \overline{S} : C^0 \times C' \to$ **Ens** astfel: dacă $(X,X') \in C^0 \times C'$, atunci $\overline{T}(X,X') = C'(T(X), X')$ și $\overline{S}(X, X') = C(X, S(X'))$ iar dacă $(f, f') : (X, X') \to (Y, Y')$ este un morfism în $C^0 \times C'$, atunci definim $\overline{T}(f, f') : C'(T(X), X') \to C'(T(Y), Y')$ prin $\overline{T}(f,f')(\alpha) = f'\alpha T(f)$, pentru orice $\alpha \in C'(T(X), X')$ iar $\overline{S}(f, f') : C(X, S(X')) \to C(Y, S(Y'))$ prin $\overline{S}(f, f')(\alpha) = S(f')\alpha f$, pentru orice $\alpha \in C(X, S(X'))$.

Lema 4.5. $\overline{T}, \overline{S}$ **:** $C^0 \times C' \to$ **Ens sunt functori covarianți.**

Demonstrație. Vom proba lucrul acesta numai pentru $\overline{T}$ (pentru $\overline{S}$ făcându-se analog). Să probăm la început că $\overline{T}(1_{(X,X')}) = 1_{\overline{T}(X,X')} \Leftrightarrow \overline{T}(1_X, 1_{X'}) = 1_{\overline{T}(X,X')} \Leftrightarrow \overline{T}(1_X, 1_{X'})(\alpha) = \alpha$, pentru oricare $\alpha \in C'(T(X), X') \Leftrightarrow 1_{X'}\alpha T(1_X) = \alpha \Leftrightarrow 1_{X'}\alpha 1_{T(X)} = \alpha$ ceea ce este evident.

Fie acum $(f, f') : (X, X') \to (Y, Y')$ și $(g, g') : (Y, Y') \to (Z, Z')$ două morfisme din $C^0 \times C'$ (avem deci $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ morfisme în **C** iar $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z'$ morfisme în **C'**).

Atunci $(g,g')(f,f')(\text{în } C^0 \times C') = (gf \text{ (în } C^0), g'f' \text{ (în } C')) = (fg \text{ (în } C), g'f' \text{ (în } C')) = (fg, g'f') \text{ (în } C \times C')$, astfel, a proba $\overline{T}((g,g')(f,f')) = \overline{T}(g,g')\,\overline{T}(f,f') \Leftrightarrow \overline{T}(fg, g'f')(\alpha) = \overline{T}(g,g')(\overline{T}(f,f')(\alpha))$, pentru orice $\alpha \in \overline{T}(X, X') = C'(T(X), X') \Leftrightarrow g'f'\alpha T(fg) = T(g, g')(f'\alpha T(f)) \Leftrightarrow g'f'\alpha T(fg) = g'(f'\alpha T(f))T(g) \Leftrightarrow g'f'\alpha T(fg) = g'f'\alpha T(f)T(g)$ ceea ce este evident (ținând cont de faptul că T este functor covariant și deci $T(fg) = T(f)T(g)$). ■

Definiția 4.6. Fie T : C → C′ și S : C → C doi functori covarianți. Vom spune că T este *un adjunct la stânga al lui S* (sau că S este *un adjunct la dreapta al lui T*) dacă $\bar{T} \approx \bar{S}$ (adică există un izomorfism functorial $\psi : \bar{T} \to \bar{S}$).

Fie acum $\psi : \bar{T} \to \bar{S}$ un morfism functorial de componente $\psi(X, X') : \bar{T}(X, X') = C'(T(X), X') \to \bar{S}(X, X') = C(X, S(X'))$ cu $(X, X') \in C^0 \times C'$ și să notăm cu $\psi_X = \psi(X, T(X))(1_{T(X)}) : X \to (ST)(X)$.

Lema 4.7. În ipotezele și cu notațiile de mai înainte morfismele $(\psi_X)_{X \in C}$ sunt componentele unui morfism $\overline{\psi} : 1_C \to ST$. Asocierea $\psi \to \overline{\psi}$ este o bijecție între morfismele functoriale de la $\bar{T}$ la $\bar{S}$ și morfismele functoriale de la 1_C la ST (adică de la $(\bar{T}, \bar{S})$ la $(1_C, ST)$ - dacă ținem cont de notațiile de la paragraful precedent).

Demonstrație. Pentru a demonstra că $\overline{\psi}$ este un morfism functorial, să demonstrăm că pentru orice X, Y ∈ **C** și f ∈ **C** (X, Y), diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi_X} & (ST)(X) \\ f\downarrow & & \downarrow (ST)(f) \\ Y & \xrightarrow{\psi_Y} & (ST)(Y) \end{array}$$

este comutativă, adică $(ST)(f)\,\psi_X = \psi_Y f$ (1)

Într-adevăr, prin ipoteză diagrama

$$\begin{array}{ccc} C(T(X), T(X)) = \bar{T}(X, T(X)) & \xrightarrow{\psi(X, T(X))} & \bar{S}(X, T(X)) \\ \bar{T}(1_X, T(f))\downarrow & & \downarrow \bar{S}(1_X, T(f)) \\ \bar{T}(X, T(Y)) & \xrightarrow{\psi(X, T(Y))} & \bar{S}(X, T(Y)) \end{array}$$

este comutativă și prin urmare $(\bar{S}(1_X, T(f))\psi(X, T(X)))(1_{T(X)}) =$
$= (\psi(X, T(Y))\bar{T}(1_X, T(f)))(1_{T(X)}) \Leftrightarrow \bar{S}(1_X, T(f))(\psi(X, T(X))(1_{T(X)})) =$
$= \psi(X, T(Y))\left(\bar{T}(1_X, T(f))(1_{T(X)})\right) \Leftrightarrow \bar{S}(1_X, T(f))(\psi_X) =$
$= \psi(X, T(Y))(Y(f)1_{T(X)}T(1_X)) \Leftrightarrow S(T(f))\,\psi_X 1_X = \psi(X, T(Y))(T(f)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (ST)(f)\,\psi_X = \psi(X, T(Y))(T(f))$ (2)

Tot prin ipoteză și diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C(T(Y), T(Y)) = \bar{T}(Y, T(Y)) & \xrightarrow{\Psi(Y, T(Y))} & \bar{S}(Y, T(Y)) \\ \bar{T}(f, 1_{T(Y)})\downarrow & & \downarrow \bar{S}(f, 1_{T(Y)}) \\ \bar{T}(X, T(Y)) & \xrightarrow{\Psi(X, T(Y))} & \bar{S}(X, T(Y)) \end{array}$$

este comutativă, astfel că
$(\bar{S}(f, 1_{T(Y)})\,\psi(Y, T(Y)))(1_{T(Y)}) = (\psi(X, T(Y))\bar{T}(f, 1_{T(Y)}))(1_{T(Y)}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \bar{S}(f, 1_{T(Y)})(\psi(Y, T(Y))(1_{T(Y)})) = \psi(X, T(Y))(T(f, 1_{T(Y)})(1_{T(Y)})) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \bar{S}(f, 1_{T(Y)})(\psi_Y) = \psi(X, T(Y))(1_{T(Y)}1_{T(Y)}T(f)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow S(1_{T(Y)})\psi_Y f = \psi(X, T(Y))(T(f)) \Leftrightarrow \psi_Y f = \psi(X, T(Y))(T(f))$ (3)

Din (2) și (3) deducem pe (1), adică $\overline{\psi}$ este morfism functorial de la 1_C la ST.

Fie $\alpha : (\bar{T}, \bar{S}) \to (1_C, ST)$, $\alpha(\psi) = \overline{\psi}$, oricare ar fi $\psi \in (\bar{T}, \bar{S})$.

Pentru a proba că α este o bijecție, vom construi o aplicație $\beta : (1_C, ST) \to (\bar{T}, \bar{S})$ despre care vom arăta că este inversa lui α.

Fie deci $\overline{\psi} \in (1_C, ST)$ *de componente* $\left(\overline{\psi}_X\right)_{X \in C}$, cu $\overline{\psi}_X : X \to (ST)(X)$, pentru orice X ∈ **C**.

Pentru orice $(X, X') \in C^0 \times C'$ să considerăm aplicația $\psi(X, X') : \bar{T}(X, X') \to \bar{S}(X, X')$ definită prin $\psi(X, X')(\alpha) = S(\alpha)\overline{\psi}_X$, oricare ar fi $\alpha \in C'(T(X), X')$.

Lema 4.8. Aplicațiile $(\psi(X, X'))_{(X,X') \in C^0 \times C'}$ sunt componentele unui morfism functorial $\psi : \bar{T} \to \bar{S}$.

Demonstrație. Va trebui să demonstrăm că pentru orice morfism $(f, f') : (X, X') \to (Y, Y')$ din $\mathbf{C}^0 \times \mathbf{C}'$, diagrama

$$\begin{tikzcd} C'(T(X), X') \arrow[r, "\psi(X, X')"] \arrow[d, "\overline{T}(f, f')"'] & C(X, S(X')) \arrow[d, "\overline{S}(f, f')"] \\ C'(T(Y), Y') \arrow[r, "\psi(Y, Y')"] & C(Y, S(Y')) \end{tikzcd}$$

este comutativă.

Într-adevăr, dacă $\alpha \in \mathbf{C}'(T(X), X')$, atunci $(\overline{S}(f, f')\psi(X, X'))(\alpha) = \overline{S}(f, f')(\psi(X, X')(\alpha)) = S(f')\psi(X, X')(\alpha)f = S(f')S(\alpha)\overline{\psi}_X f$ (1) iar $(\psi(Y, Y')\overline{T}(f, f'))(\alpha) = \psi(Y, Y')(\overline{T}(f, f')(\alpha)) = \psi(Y, Y')(f'\alpha T(f)) = S(f'\alpha T(f))\overline{\psi}_Y = S(f')S(\alpha)(ST)(f)\overline{\psi}_Y$ (2)

Deoarece diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\overline{\psi}_Y"] & (ST)(Y) \\ X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\overline{\psi}_X"] & (ST)(X) \arrow[u, "(ST)(f)"'] \end{tikzcd}$$

este comutativă, deducem că $(ST)(f)\,\overline{\psi}_Y = \overline{\psi}_X f$ (3)

Ținând cont de (3), din (1) și (2) deducem că diagrama de la începutul demonstrației este comutativă, adică $\psi : \overline{T} \to \overline{S}$ este morfism functorial.

Definim $\beta : (1_C, ST) \to (\overline{T}, \overline{S})$ cu ajutorul lemei precedente și anume $\beta(\overline{\psi}) = \psi$, oricare ar fi $\overline{\psi} \in (1_C, ST)$.

Lema 4.9. Aplicațiile α și β definite mai înainte sunt una inversa celeilalte (adică $\alpha\beta = 1_{(1_C, ST)}$ și $\beta\alpha = 1_{(\overline{T}, \overline{S})}$).

Demonstrație. Fie $\psi \in (\overline{T}, \overline{S})$; atunci $(\beta\alpha)(\psi) = \beta(\alpha(\psi))$ și a demonstra că $\beta(\alpha(\psi)) = \psi$ revine la a demonstra că $(\beta(\alpha(\psi)))(X, X') = \psi(X, X')$, pentru orice $(X, X') \in \mathbf{C}^0 \times \mathbf{C}'$.

Avem că $(\beta(\alpha(\psi)))(X, X') : \mathbf{C}'(T(X), X') \to \mathbf{C}(X, S(X'))$ este definit a.î. $\beta(\alpha(\psi))(X, X')(f) = S(f)\,\psi(X, T(X))(1_{T(X)})$.

Ținând cont de comutativitatea diagramei:

$$\begin{tikzcd} C'(T(X), T(X)) \arrow[r, "\psi(X, T(X))"] \arrow[d, "\overline{T}(1_X, f)"'] & C(X, (ST)(X)) \arrow[d, "\overline{S}(1_X, f)"] \\ C'(T(X), X') \arrow[r, "\psi(X, X')"] & C(X, S(X')) \end{tikzcd}$$

deducem că

$(\overline{S}(1_X, f))\psi(X, T(X))(1_{T(X)}) = (\psi(X, X')\overline{T}(1_X, f))(1_{T(X)}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{S}(1_X, f)(\psi(X, T(X))(1_{T(X)})) = \psi(X, X')(\overline{T}(1_X, f))(1_{T(X)}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S(f)\psi(X, T(X))(1_{T(X)})1_X = \psi(X, X')(f 1_{T(X)} T(1_X)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S(f)\psi(X, T(X))(1_{T(X)}) = \psi(X, X')(f) \Leftrightarrow \beta(\alpha(\psi))(X, X')(f) = \psi(X, X')(f)$, de unde deducem că $\beta(\alpha(\psi)) = \psi$, adică $\beta\alpha = 1_{(\overline{T}, \overline{S})}$.

Fie acum $\varphi \in (1_C, ST)$. Pentru $X \in \mathbf{C}$ avem $((\alpha\ \beta)(\varphi))_X = (\alpha(\beta(\varphi)))_X = \beta(\varphi)(X, T(X))(1_{T(X)}) = \varphi(X, T(X))(1_{T(X)}) = S(1_{T(X)})\varphi_X = 1_{ST(X)}\varphi_X = \varphi_X$, adică $(\alpha\ \beta)(\varphi) = \varphi$, deci $\alpha\beta = 1_{(1_C, ST)}$. ∎

Observația 4.10. Dual, dacă $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ și $S : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ sunt doi functori covarianți, atunci la orice morfism functorial $\varphi : \overline{S} \to \overline{T}$ de componente $\varphi(X, X') : \overline{S}(X, X') \to \overline{T}(X, X')$, oricare ar fi $(X, X') \in \mathbf{C}^0 \times \mathbf{C}$ corespunde o familie de morfisme $\left(\overline{\varphi}_{X'}\right)_{X' \in C'}$, unde $\overline{\varphi}_{X'} = \varphi(S(X'), X')(1_{S(X')})$, $\overline{\varphi}_{X'} : (TS)(X') \to X'$ iar asocierea $X' \to \overline{\varphi}_{X'}$, $X' \in \mathbf{C}'$, definește un morfism functorial $\overline{\varphi} : TS \to 1_{C'}$.

Asocierea $\varphi \to \overline{\varphi}$ este o bijecție de la $(\overline{S}, \overline{T})$ la $(TS, 1_{C'})$, inversa acesteia asociind la orice morfism functorial $\overline{\varphi} \in (TS, 1_C)$ de componente $\left(\overline{\varphi}_{X'}\right)_{X' \in C'}$ morfismul functorial $\varphi : \overline{S} \to \overline{T}$ de componente $\varphi(X,X') : \bar{S}(X,X') \to \bar{T}(X,X')$, $\varphi(X, X')(f) = \varphi_{X'}\, T(f)$, pentru orice $f \in \mathbf{C}(X, S(X'))$.

Definiția 4.11. Fie $\psi : \bar{T} \to \bar{S}$ și $\varphi : \bar{S} \to \bar{T}$ două morfisme functoriale iar $\bar{\psi} : 1_C \to ST$ și $\bar{\varphi} : TS \to 1_C$ morfismele functoriale asociate lor prin lemele precedente.

Dacă T este adjunctul la stânga al lui S iar φ este izomorfismul invers al lui ψ, atunci vom spune că $\bar{\psi}$ și $\bar{\varphi}$ sunt *săgeți de adjuncție* (una *cvasiinversă* celeilalte).

Fie $S : \mathbf{C'} \to \mathbf{C}$ un functor covariant. Pentru orice $X \in \mathbf{C}$ notăm prin $X / (\mathbf{C'}, S)$ (respectiv $(\mathbf{C'}, S) / X$) categoria ale cărei obiecte sunt perechi (f, X') (respectiv (X', f)) cu $f \in \mathbf{C}(X, S(X'))$ (respectiv $f \in \mathbf{C}(S(X'), X)$).

Un morfism $\alpha : (f, X') \to (g, Y')$ (respectiv $\alpha : (X', f) \to (Y', g)$) este prin definiție un morfism $\alpha : X' \to Y'$ din $\mathbf{C'}$ a.î. $S(\alpha) f = g$ (respectiv $g\, S(\alpha) = f$).

Propoziția 4.12. Dacă $S : \mathbf{C'} \to \mathbf{C}$ este un functor covariant, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Există un functor covariant $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C'}$ adjunct la stânga pentru S

(ii) Pentru orice $X \in \mathbf{C}$, functorul $h^X S : \mathbf{C'} \to \mathbf{Ens}$ este reprezentabil

(iii) Pentru orice $X \in \mathbf{C}$ categoria $X / (\mathbf{C'}, S)$ are un obiect inițial.

Demonstrație. (i)$\Rightarrow$(ii). Cum T este adjunct la stânga al lui S, există un izomorfism functorial $\psi : \bar{T} \to \bar{S}$ și prin urmare, pentru orice $X \in \mathbf{C}$ un izomorfism functorial în Y, $\psi_Y = \psi(X, Y) : \mathbf{C'}(T(X), Y) \to \mathbf{C}(X, S(Y))$, adică $\psi_Y : h^{T(X)}(Y) \to (h^X S)(Y)$, ceea ce ne arată că functorul $F = h^X S$ este reprezentabil, având ca pereche de reprezentare pe $(T(X), x)$ (unde $x = \psi(X, T(X))(1_{T(X)}) \in \mathbf{C}(X, (ST)(X)) = (h^X S)(T(X)) = F(T(X))$).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Presupunem că pentru orice $X \in \mathbf{C}$ functorul $F = h^X S$ este reprezentabil și fie (X', x) o pereche de reprezentare a sa cu $X' \in \mathbf{C'}$ și $x \in F(X') = (h^X S)(X') = h^X(S(X')) = \mathbf{C}(X, S(X'))$.

Avem deci izomorfismul functorial $\beta^x : h^{X'} \to h^X S$, altfel zis, pentru orice $Y' \in \mathbf{C'}$ avem o bijecție de mulțimi $\beta^x(Y') : \mathbf{C'}(X', Y') \to \mathbf{C}(X, S(Y'))$ (cu caracter functorial).

Să arătăm că obiectul (f, X'), cu $f = \beta^x(X')(1_{X'}) \in \mathbf{C}(X, S(X'))$ este obiect inițial în categoria $X / (\mathbf{C'}, S)$

Într-adevăr, dacă (g, Y') este un alt obiect din $X / (\mathbf{C'}, S)$, atunci $g \in \mathbf{C}(X, S(Y'))$ și prin urmare există un unic $\alpha \in \mathbf{C'}(X', Y')$ a.î. $\beta^x(Y')(\alpha) = g$. Mai avem de demonstrat că α este morfism în $X / (\mathbf{C'}, S)$.

Într-adevăr, din diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C'}(X', X') & \xrightarrow{\beta^x(X')} & \mathbf{C}(X, S(X')) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle h^{X'}(\alpha)} & & \Big\downarrow {\scriptstyle (h^X S)(\alpha)} \\ \mathbf{C'}(X', Y') & \xrightarrow{\beta^x(Y')} & \mathbf{C}(X, S(Y')) \end{array}$$

deducem că:

$((h^X S)(\alpha)\, \beta^x(X'))(1_{X'}) = (\beta^x(Y')\, h^{X'}(\alpha))(1_{X'}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (h^X S)(\alpha)(\beta^x(X')(1_{X'})) = \beta^x(Y')(h^{X'}(\alpha)(1_{X'})) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (h^X S)(\alpha)(f) = \beta^x(Y')(\alpha) \Leftrightarrow h^X(S(\alpha))(f) = g \Leftrightarrow S(\alpha) f = g$,

adică $\alpha : (f, X') \to (g, Y')$ este morfism în $X / (\mathbf{C'}, S)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Pentru orice $X \in \mathbf{C}$, vom nota prin $(i_X, T(X))$ un obiect inițial din categoria $X / (\mathbf{C'}, S)$ (cu $T(X) \in \mathbf{C'}$ și $i_X \in \mathbf{C}(X, (ST)(X))$).

Dacă avem $X, Y \in \mathbf{C}$ și $u \in \mathbf{C}(X, Y)$, definind $T(u) : T(X) \to T(Y)$ ca fiind unicul morfism ce face comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "u"'] & S(T(X)) \arrow[d, "S(T(u))"] \\ Y \arrow[r, "i_Y"] & S(T(Y)) \end{tikzcd}$$

se arată ușor că asocierile $X \to T(X)$ și $u \to T(u)$ definesc un functor covariant $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$.

Pentru a demonstra că T este un adjunct la stânga al lui S, să arătăm că există un izomorfism functorial $\varphi : \bar{S} \to \bar{T}$.

Pentru aceasta, dacă $(X, X') \in \mathbf{C}^0 \times \mathbf{C}'$ definim $\varphi(X, X') : \bar{S}(X,X') = \mathbf{C}(X, S(X')) \to \bar{T}(X,X') = \mathbf{C}'(T(X),X')$ astfel: pentru $v \in \mathbf{C}(X, S(X'))$, $\varphi(X, X')(v)$ este unicul morfism $\alpha \in \mathbf{C}'(T(X), X')$ ce face comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "v"'] & ST(X) \arrow[dl, dashed, "S(\alpha)"] \\ S(X') & \end{tikzcd}$$

Rezultă astfel că $\varphi(X, X')$ este o aplicație injectivă și cum pentru $\beta \in \mathbf{C}'(T(X), X')$, $\varphi(X, X')(S(\beta)\, i_X) = \beta$ deducem că $\varphi(X, X')$ este și aplicație surjectivă, adică $\varphi(X, X')$ este aplicație bijectivă.

Cum probarea faptului că φ este morfism functorial este imediată, propoziția este complet demonstrată. ■

Dual se demonstrează:

Propoziția 4.13. Fie $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ un functor covariant. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Există un functor covariant $S : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ adjunct la dreapta al lui T

(ii) Pentru orice $X' \in \mathbf{C}'$, functorul $h_{X'}T$ este coreprezentabil

(iii) Pentru orice $X' \in \mathbf{C}'$, categoria $(\mathbf{C}, T)/X'$ are un obiect final.

Observația 4.14. Adjunctul la stânga (dreapta) al unui functor, dacă există, este unic determinat până la un izomorfism functorial.

Într-adevăr, fie $S : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ un functor covariant și $T, T' : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ doi adjuncți ai săi la stânga.

Conform Propoziției 4.12, pentru orice $X \in \mathbf{C}$, functorul $h^X S$ este reprezentabil, deci există izomorfismele functoriale $\alpha : h^{T(X)} \to h^X S$ și $\beta : h^{T'(X)} \to h^X S$. Deducem existența izomorfismului functorial $\alpha^{-1}\beta : h^{T'(X)} \to h^{T(X)}$ care determină existența unui izomorfism $\gamma(X) : T'(X) \to T(X)$ din $\mathbf{C}'$ a.î. $h^{\gamma(X)} = \alpha^{-1}\beta$ (căci pentru orice $Y \in \mathbf{C}'$, h^Y este deplin fidel).

Cum $\alpha^{-1}\beta$ este morfism functorial, rezultă că morfismele $(\gamma(X))_{X \in \mathbf{C}}$ sunt componentele unui izomorfism functorial $\gamma : T' \to T$. Analog se demonstrează afirmația duală.

Exemple

1. Functorul incluziune $i : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Pre}$ (de la categoria mulțimilor ordonate la categoria mulțimilor preordonate) admite un adjunct la stânga $j : \mathbf{Pre} \to \mathbf{Ord}$.

Într-adevăr, fie $(M, \leq) \in \mathbf{Pre}$. Pe M considerăm relația $R : xRy \Leftrightarrow x \leq y$ și $y \leq x$; se verifică imediat că R este o relație de echivalență pe M compatibilă cu "$\leq$" (adică $x R x'$ și $y R y'$, dacă $x \leq y$ atunci și $x' \leq y'$) (vezi § 5 de la Capitolul 1).

Fie $\overline{M} = M/R$ mulțimea cât înzestrată cu *preordinea cât* (adică pentru $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{M}$, $\bar{x} \leq \bar{y} \Leftrightarrow$ există $x' \in \bar{x}$, $y' \in \bar{y}$ a.î. $x' \leq y'$) iar $p_M : M \to \overline{M}$ surjecția canonică (care este o funcție izotonă). Fie acum

$g : M \to N$ o aplicație izotonă, cu N mulțime ordonată. Dacă $R(g)$ este relația de echivalență de pe M asociată lui g (adică $xR(g)y \Leftrightarrow g(x) = g(y)$), atunci $R \le R(g)$ și atunci va exista o unică funcție izotonă $\bar{g} : \overline{M} \to N$ a.î. $\bar{g}p = g$.

Deducem imediat că dacă $f : M \to N$ este o funcție izotonă între două mulțimi preordonate, atunci există o unică funcție izotonă $\bar{f} : \overline{M} \to \overline{N}$ a.î. diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p_M"] \arrow[d, "f"'] & \overline{M} \arrow[d, "\bar{f}"] \\ N \arrow[r, "p_N"'] & \overline{N} \end{tikzcd}$$

este comutativă.

Din unicitate rezultă că asocierea $M \to \overline{M}$ și $f \to \bar{f}$ definește un functor covariant j : **Pre** $\to$ **Ord**.

Acesta, conform Propoziției 4.12, este adjunct la stânga al lui i (deoarece din cele de mai sus deducem că pentru orice $N \in$ **Pre**, obiectul $(p_M, \overline{M})$ este obiect inițial în categoria M / (**Ord**, i)).

2. Functorul subiacență S : **Top** $\to$ **Ens** admite un adjunct la stânga D : **Ens** $\to$ **Top** și un adjunct la dreapta G : **Ens** $\to$ **Top**, definiți astfel:

Functorul D este functorul topologie discretă, adică functorul care la fiecare mulțime asociază aceeași mulțime înzestrată cu topologia discretă și la fiecare aplicație de mulțimi asociază aceeași aplicație care în mod evident este continuă pentru topologiile discrete.

Functorul G este functorul topologie grosieră, adică functorul care la fiecare mulțime asociază aceeași mulțime înzestrată cu topologia grosieră și la fiecare aplicație de mulțimi asociază aceeași aplicație care este evident continuă pentru topologiile grosiere.

§ 5. Reflefunctori. Subcategorii reflexive

Definiția 5.1. O subcategorie C' a unei categorii C se zice ***reflexivă*** **dacă există un functor covariant $R : C \to C'$, numit** ***reflefunctor*** **a.î. pentru orice $A \in C$ există un morfism $\phi_R(A) : A \to R(A)$ în C cu proprietățile:**

i) Dacă $f \in C(A, A')$, atunci diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_R(A)"'] & A' \arrow[d, "\phi_R(A')"] \\ R(A) \arrow[r, "R(f)"'] & R(A') \end{tikzcd}$$

este comutativă, adică $\phi_R(A')f = R(f)\,\phi_R(A)$

ii) Dacă $B \in C'$ și $f \in C(A, B)$, atunci există un unic morfism $f' \in C'(R(A), B)$ a.î. diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi_R(A)"] \arrow[dr, "f"'] & R(A) \arrow[d, dashed, "f'"] \\ & B \end{tikzcd}$$

este comutativă, (adică $f'\,\phi_R(A) = f$).

Observația 5.2.

1. Fie $C' \subseteq C$ o subcategorie. Atunci C' este subcategorie reflexivă a lui C dacă și numai dacă există o funcție care asociază la fiecare $A \in C$ un obiect $R(A) \in C'$ și o funcție care asociază la fiecare $A \in C$ un morfism $\phi_R(A) : A \to R(A)$ din C a.î. pentru orice

$B \in C'$ și $f \in C(A, B)$ există un unic $f' \in C'(R(A), B)$ a.î. $f' \phi_R(A) = f$.

Într-adevăr, implicația de la stânga la dreapta este imediată.

Pentru cealaltă implicație, să definim reflefunctorul $R : C \to C'$.

Pentru $f \in C(A, A')$, definim $R(f) \in C'(R(A), R(B))$ ca fiind unicul morfism din C' pentru care $R(f)\, \phi_R(A) = \phi_R(A')f$. Atunci (i) și (ii) din Definiția 5.1 sunt verificate, rămânând să mai arătăm că R este functor. Într-adevăr, dacă $f \in C(A, A')$, $g \in C(A', A'')$, atunci $R(f)\, \phi_R(A) = \phi_R(A')\, f$ și $R(g)\, \phi_R(A') = \phi_R(A'')g$; astfel că $R(g)\, R(f)\, \phi_R(A) = R(g)\, \phi_R(A')\, f = \phi_R(A'')\, gf$ și datorită unicității deducem că $R(g)\, R(f) = R(gf)$. Pentru $1_A \in C(A, A)$, deducem că $R(1_A)\, \phi_R(A) = \phi_R(A)\, 1_A = \phi_R(A)$, de unde rezultă că $1_{R(A)} = R(1_A)$.

2. Dacă $R : C \to C'$, $S : C' \to C''$ sunt doi reflefunctori, atunci $SR : C \to C''$ este reflefunctor.

Într-adevăr, ne vom folosi de observația precedentă. Pentru $A \in C$ fie $\phi_{RS}(A) = \phi_S(R(A))\, \phi_R(A)$.

Dacă $C \in C$ și $f \in C(A, C)$, atunci există un unic $f' \in C'(R(A), C)$ a.î. $f'\phi_R(A) = f$ și există un unic $f'' \in C((SR)(A), C)$ a.î. $f''\phi_S(R(A)) = f'$. Rezultă ușor că $f''\, \phi_{SR}(A) = f$. Pentru unicitate, fie $g \in C((SR)(A), C)$ a.î. $g\, \phi_{(SR)(A)} = f$; atunci $g\, \phi_S(R(A))\, \phi_R(A) = f$, astfel că $f' = g\, \phi_S(R(A))$ și atunci $g = f''$.

3. Dacă C' este o subcategorie plină a lui C, atunci a spune că $R : C \to C'$ este un reflefunctor este echivalent cu a spune că el este un adjunct la stânga al functorului incluziune de la C' în C.

Lema 5.3. Orice reflefunctor $R : C \to C'$ păstrează epimorfismele.

Demonstrație. Presupunem că $f \in C(A, A')$ este epimorfism în C și fie $g, h \in C'(R(A'), B)$ a.î. $gR(f) = hR(f)$. Atunci $g\phi_R(A')f = gR(f)\phi_R(A) = hR(f)\phi_R(A) = h\phi_R(A')f$ și cum f este epimorfism în C deducem că $g\phi_R(A') = h\phi_R(A')$, adică $g = h$. ■

§ 6. Produse și sume directe ale unei familii de obiecte

Fie C o categorie iar $F = (M_i)_{i \in I}$ o familie nevidă de obiecte din C.

Definiția 6.1. Se numește *produs direct* al familiei F o pereche $(M, (p_i)_{i \in I})$ cu $M \in C$ iar $p_i \in C(M, M_i)$, pentru orice $i \in I$ a.î. oricare ar fi o altă pereche $(M', (p'_i)_{i \in I})$, *cu* $p'_i \in C(M', M_i)$, **oricare ar fi $i \in I$ să existe un unic $f \in C(M', M)$ a.î. $p'_i = p_i f$, pentru oricare $i \in I$.**

Observația 6.2. Dacă există un produs direct al familiei F, atunci el este unic până la un izomorfism.

Într-adevăr, să presupunem că avem două produse directe $(M, (p_i)_{i \in I})$ și $\left(M'_i, (p'_i)_{i \in I}\right)$ ale lui F. Considerând diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "p_i"] \arrow[d, shift right, "g"'] & \\
M' \arrow[r, "p'_i"'] \arrow[u, shift right, "f"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

rezultă că există un unic $f \in C(M', M)$ și un unic $g \in C(M, M')$ a.î. $p_i f = p'_i$ și $p'_i g = p_i$, oricare ar fi $i \in I$.

Atunci $p_i(fg) = p_i$ și $p'_i(gf) = p'_i$, oricare ar fi $i \in I$.

Considerând acum diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "p_i"] \arrow[d, shift right, "fg"'] \arrow[d, shift left, "1_M"] & \\
M \arrow[r, "p_i"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

din definiția produsului direct deducem cu necesitate că $fg = 1_M$.

Analog, deducem că și $gf = 1_{M'}$, deci $M \approx M'$.

Produsul direct al familiei F dacă există, se notează prin $\prod_{i\in I} M_i$ iar $p_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j$ poartă numele de *proiecția canonică de indice j*.

Lema 6.3. Fie $\prod_{i\in I} M_i = \left(M, (p_i)_{i\in I}\right)$ un produs direct al familiei F. Atunci, pentru orice $i \in I$ proiecția p_i de indice i este morfism secționabil (deci epimorfism) $\Leftrightarrow$ C $(M_i, M_j) \neq \emptyset$, pentru orice $j \in I$.

Demonstrație. Presupunem că pentru orice $j \in I$, **C** $(M_i, M_j) \neq \emptyset$ și alegem un $f_{ij} \in$ **C** (M_i, M_j) astfel ca $f_{ii} = 1_{M_i}$. Există atunci un morfism unic $f_i : M_i \to \prod_{j\in I} M_j$ a.î. $p_j f_i = f_{ij}$, pentru orice $j \in I$. În particular, pentru $i = j$ avem $p_i f_i = f_{ii} = 1_{M_i}$, adică p_i este secționabil și deci epimorfism.

Reciproc, dacă p_i este secționabil și s_i este un invers la dreapta al lui p_i, atunci pentru orice $j \in I$, $p_j s_i \in$ **C** (M_i, M_j), adică C $(M_i, M_j) \neq \emptyset$, pentru orice $j \in I$. ■

Corolar 6.4. Dacă C este o categorie cu un obiect nul O, atunci proiecțiile canonice ale oricărui produs direct existent în C sunt epimorfisme secționabile.

Demonstrație. Este suficient ca în propoziția precedentă să considerăm pentru orice $j \in I$, $f_{ij} = O_{M_iM_j}$ și $f_{ii} = 1_{M_i}$. ■

Definiția 6.5. Vom spune despre categoria C că *este cu produse directe*, dacă pentru orice familie de obiecte există produsul lor direct.

Exemple.

1. Categoria **Ens** este o categorie cu produse directe (vezi § 8 de la Capitolul 1).

2. Gr este o categorie cu produse directe.

Într-adevăr, dacă $F = (G_i)_{i\in I}$ este o familie de grupuri, atunci luând în **Ens** $\prod_{i\in I} G_i = \left(G, (p_i)_{i\in I}\right)$ și definind pentru două elemente $f, g \in G$, $f = (f_i)_{i\in I}$, $g = (g_i)_{i\in I}$, cu $f_i, g_i \in G_i$ pentru orice $i \in I$, $fg = (f_i g_i)_{i\in I}$, se verifică imediat că în raport cu această înmulțire "pe componente" G devine grup iar p_i - urile devin morfisme de grupuri. Atunci $(G, (p_i)_{i\in I}) = \prod_{i\in I} G_i$ în categoria **Gr**.

3. Categoria **Fd** a corpurilor nu este o categorie cu produse directe.

Într-adevăr, dacă K și K′ sunt două corpuri de caracteristici diferite, atunci în mod evident nu există $K \prod K'$ în **Fd**.

Noțiunea duală celei de produs direct este aceea de *sumă directă*. Mai precis, avem următoarea definiție:

Definiția 6.6. Se numește *sumă directă* în categoria C a familiei de obiecte $F = (M_i)_{i\in I}$ din C, o pereche $((\alpha_i)_{i\in I}, M)$ unde $M \in$ C iar $\alpha_i \in$ C (M_i, M), pentru oricare $i \in I$ a.î. oricare ar fi altă pereche $\left((\alpha_i')_{i\in I}, M'\right)$ cu $M' \in$ C și $\alpha_i' \in$ C (M_i, M'), pentru oricare $i \in I$, să existe un unic morfism $f \in$ C (M, M') a.î. $f\alpha_i = \alpha_i'$, pentru orice $i \in I$.

Observația 6.7. Analog ca în cazul produsului direct al familiei F, se demonstrează că dacă suma directă a familiei F există, atunci ea este unică până la un izomorfism.

Vom nota suma directă a familiei F prin $\coprod_{i\in I} M_i$.

Pentru orice $j \in I$, $\alpha_j : M_j \to \coprod_{i\in I} M_i$ poartă numele de *injecția canonică de indice j*.

Din Lema 6.3. și Corolarul 6.4. prin dualizare obținem:

Lema 6.8. Injecția canonică α_i este morfism retractabil (deci monomorfism) dacă și numai dacă C $(M_i, M_j) \neq \emptyset$, pentru orice $i \in I$.

Corolar 6.9. Dacă C are un obiect nul, atunci injecțiile canonice ale oricărei sume directe existente în C sunt monomorfisme retractabile.

Definiția 6.10. Vom spune despre C că are *sume directe* dacă pentru orice familie de obiecte din C există suma lor directă.

Exemple.

1. **Ens** este o categorie cu sume directe (vezi § 8 de la Capitolul 1).

2. Să vedem care este situația sumelor directe într-o categorie ecuațională **A**:

Propoziția 6.11. Fie A o categorie ecuațională și $(A_i)_{i\in I}$ o familie de algebre din A. Pentru $A \in$ A presupun că avem o familie de morfisme $(\alpha_i : A_i \to A)_{i\in I}$ a.î. dacă $(f_i : A_i \to B)_{i\in I}$ $(B \in$ A) este o altă familie de morfisme din A, atunci există $f \in$ A (A, B) a.î. $f\circ\alpha_i = f_i$ pentru orice $i \in I$.

Atunci $(A, (\alpha_i)_{i\in I}) = \bigsqcup_{i\in I} A_i$ dacă și numai dacă $\bigcup_{i\in I}\alpha_i(A_i)$ generează pe A (adică $\left[\bigcup_{i\in I}\alpha_i(A_i)\right] = A$).

Demonstrație. "$\Leftarrow$". Mai trebuie probată unicitatea lui f. Aceasta rezultă din observația de după Definiția 1.5 din Capitolul 2 din [3].

"$\Rightarrow$". Fie $A' = \left[\bigcup_{i\in I}\alpha_i(A_i)\right]$. Pentru fiecare $i \in I$ definim $f_i' : A_i \to A'$ prin $f_i'(x) = \alpha_i(x)$ pentru $x \in A_i$ și cum **A** este categorie ecuațională deducem că $f_i' \in$ **A** (A_i, A') pentru orice $i \in I$. Conform ipotezei există $f \in$ **A** (A, A') a.î. $f_i' = f\circ\alpha_i$ și $1_{A',A}\circ f_i' = \alpha_i$ pentru orice $i \in I$. Cum și $1_A\circ\alpha_i = \alpha_i$ pentru orice $i \in I$ deducem că $1_{A',A}\circ f = 1_A$ ceea ce ne arată că $1_{A',A}$ este surjecție, deci $A' = A$. ■

Observația 6.12. În Capitolul 2, § 6, din [3], am definit noțiunea de *algebră liberă* peste o clasă de algebre.

Iată o generalizare a acestei noțiuni:

Definiția 6.13. O algebră A dintr-o categorie ecuațională A se zice *liberă peste A, fiind liber generată* de mulțimea S dacă există o funcție $i : S \to A$ a.î. pentru orice funcție $f : S \to B$ (cu $B \in$ A) există un unic morfism $g \in$ A (A, B) a.î. $g\circ i = f$.

Evident, dacă $S \subseteq A$ este nevidă și considerăm $i = 1_{S,A}$ obținem noțiunea definită în Capitolul 2, § 6, Definiția 6.1 din [3].

Corolar 6.14. Fie A o categorie ecuațională netrivială iar S o mulțime nevidă. Presupun că $\bigsqcup_{s\in S} \mathbf{F}_A(\{s\}) = (A, (\alpha_s)_{s\in S})$ cu $A \in$ A și $\alpha_s \in$ A ($\mathbf{F}_A(\{s\})$, A) pentru $s \in S$. Atunci $A \approx \mathbf{F}_A(S)$.

Demonstrație. Fie $f : S \to A$, $f(s) = \alpha_s(s)$ pentru orice $s \in S$, $B \in$ **A** și $g : S \to B$ o funcție. Atunci pentru orice $s \in S$ există un unic $g_s \in$ **A** ($\mathbf{F}_A(\{s\})$, B) a.î. $g_s(s) = g(s)$ pentru orice $s \in S$. Va exista un unic $h \in$ **A** (A, B) a.î. $h\circ\alpha_s = g_s$ și atunci rezultă că $h\circ f = g$. Cum h este unic, aplicând Propoziția 6.11, deducem că $A \approx \mathbf{F}_A(S)$. ■

Observația 6.15. În lucrarea [Pierce R.S., *Introduction to the Theory of Abstract Algebras*, Holt, Rinchart & Winston, New York, 1968] la pag. 107 se demonstrează următorul rezultat:

Propoziția 6.16 Fie A o categorie ecuațională și $(A_i)_{i\in I}$ o familie de algebre din A. Presupun că fiecare algebră A_i este subalgebră a unui algebre $B_i \in$ A și că pentru $i \neq j$ există $\alpha_{ij} \in$ A (A_i, B_j). Atunci există $\bigsqcup_{i\in I} A_i$.

3. Sume directe în categoriile **Mon** și **Gr.**

Fie M o mulțime. Existența monoidului (grupului) liber generat de M ne este asigurată de Teorema 6.16 din Capitolul 2 din [3]. Iată în continuare o descriere a acestora.

Dacă $M^* = \bigsqcup_{n\geq 0} M^n$ (în **Ens**), atunci elementele lui M^* sunt perechi (f, n) cu $n \in \mathbf{N}$ iar $f = (x_1, \dots, x_n) \in M^n$.

Dacă vom nota prin $(\ )$ șirul vid (de lungime 0), atunci $M^0 = ((\ ), 0)$.

Pe M^* considerăm o operație de compunere (prin juxtapunere) astfel: dacă $x = ((x_1, \dots, x_n), n)$ și $x' = ((x'_1, \dots, x'_n), n') \in M^*$, atunci $xx' = ((x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n), n + n') \in M^*$.

Se verifică imediat că în felul acesta M^* devine monoid (în care elementul neutru este șirul vid $e_{M^*} = ((\ ), 0)$ iar $i_M : M \to M^*$, $i_M(x) = ((x), 1)$ este morfism injectiv de monoizi. Cum pentru orice monoid M' și orice funcție $f : M \to M'$, $\bar{f} : M^* \to M'$, $\bar{f}(((\ ), 0)) = e_{M'}$ și $\bar{f}(((x_1, \dots, x_n), n)) = f(x_1) \dots f(x_n)$ (pentru $n \geq 1$) este unicul morfism de monoizi pentru care $\bar{f} \circ i_M = f$ deducem că M^* este monoidul liber generat de M (adică $M^* = \mathbf{F}_{\mathbf{Mon}}(M)$).

Fie acum $(M_i)_{i \in I}$ o familie nevidă de monoizi, $M = \bigsqcup_{i\in I} M_i$ (în **Ens**) de injecții canonice $\alpha_i : M_i \to M$ $(i \in I)$ iar M^* monoidul liber generat de M (descris mai înainte). Elementele lui M^* sunt dublete $((a_1, \dots, a_n), n)$ cu $(a_1, \dots, a_n) \in M^n$, adică $a_j = (x_j, i_j)$ cu $x_j \in M_{i_j}$ iar $i_j \in I$.

Fie θ_M congruența de pe M^* generată de elementele $((x_j, i_j)\ (y_j, i_j), (x_j y_j, i_j)), (e_j, i_j), (\ ))$, cu $x_j, y_j \in M_{i_j}$ iar e_j elementul neutru al lui M_j $(j, i_j \in I)$.

Dacă notăm cu $\pi_{\theta_M} : M^* \to M^*/\theta_M$ morfismul surjectiv canonic de monoizi iar prin $\bar{\alpha}_i = \pi_{\theta_M} \circ \alpha_i$ $(i \in I)$ atunci $\bigsqcup_{i\in I} M_i$ în **Mon** există și este dată de dubletul $(M^*/\theta_M, (\bar{\alpha}_i)_{i\in I})$.

Ținând cont de acest rezultat ca și de faptul că orice categorie ecuațională este cu produse directe obținem:

Propoziția 6.17. Categoria Mon a monoizilor este o categorie cu sume și produse directe.

Să tratăm acum problema sumelor directe în categoria **Gr**.

La început să vedem cum arată *grupul liber generat de o mulțime* M. Pentru aceasta să notăm prin M' imaginea lui M printr-o bijecție

a.î. $M \cap M' = \varnothing$ (iar pentru $x \in M$ prin x' imaginea lui x prin respectiva bijecție).

Pe monoidul liber $(M \sqcup M')^*$ (unde $M \sqcup M'$ este suma directă a lui M cu M' în **Ens**) considerăm congruența ρ_M generată de elementele $((x)\,(x'), (\ ))$ și $((x')\,(x), (\ ))$ cu $x \in M$. Lăsăm cititorului să probeze că monoidul cât $(M \sqcup M')^*/\rho_M$ (care este grup) este de fapt grupul liber generat de M.

Dacă $(G_i)_{i \in I}$ este o familie nevidă de grupuri, atunci $\bigsqcup_{i\in I} G_i$ (în **Gr**) se construiește analog ca în cazul **Mon**. Avem deci:

Propoziția 6.18. Gr este o categorie cu sume și produse directe.

Observația 6.19. Dacă construim $\bigsqcup_{i\in I} G_i$ (în **Gr**) este posibil ca aceasta să difere de $\bigsqcup_{i\in I} G_i$ din **Ab**.

4. Categoria **Fd** a corpurilor nu este o categorie cu sume directe.

Într-adevăr, dacă K, K' sunt două corpuri de caracteristici diferite, atunci se probează imediat că nu există $K \sqcup K'$ în Fd.

Observația 6.20. Dacă **C** este o categorie cu sume și produse directe, atunci pentru orice $M \in \mathbf{C}$ și $I \neq \varnothing$ notăm $M^I = \prod_{i\in I} M_i$ *iar* $M^{(I)} = \bigsqcup_{i\in I} M_i$, unde $M_i = M$, oricare ar fi $i \in I$.

Observația 6.21.

1. Injecțiile (proiecțiile) canonice ale unei sume directe (produs direct) nu sunt în general monomorfisme (epimorfisme).

2. Fie $((X_i, \leq))_{i \in I}$ o familie de mulțimi din **Pre**, iar $(X', (p_i)_{i \in I}) = \prod_{i\in I} X_i$ și $((\alpha_i)_{i \in I}, X'') = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ în **Ens**.

Pentru $x, y \in X'$, $x \in (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I}$ definim $x \leq' y \Leftrightarrow x_i \leq y_i$, pentru orice $i \in I$ iar pentru $(x, i), (y, j) \in X''$ definim $(x, i) \leq'' (y, j) \Leftrightarrow i = j$ și $x \leq y$ în X_i.

Atunci:

(i) Față de relația $\leq'$ proiecțiile sunt aplicații izotone iar $((X', \leq'), (p_i)_{i \in I}) = \prod_{i\in I} (X_i, \leq)$ în **Pre**.

(ii) Față de relația $\leq''$ injecțiile canonice sunt izotone iar $((\alpha_i)_{i \in I}, (X'', \leq'')) = \coprod_{i\in I} (X_i, \leq)$ în **Pre**.

3. Analog se probează că **Ord** posedă sume și produse directe.

4. Fie $(G_i)_{i \in I}$ o familie de grupuri abeliene aditive iar $G = \prod_{i\in I} G_i$. Considerăm subgrupul G' al lui G format din acele elemente $(x_i)_{i \in I}$ ale cărui componente sunt nule cu excepția unui număr finit și pentru orice $i \in I$, $\alpha_i : G_i \to G'$, $\alpha_i(x_i) = (y_j)_{j \in I}$ unde $y_i = x_i$ și $y_j = 0$ pentru $j \neq i$.

Atunci pentru orice $i \in I$, α_i este morfism de grupuri iar $((\alpha_i)_{i \in I}, G') = \coprod_{i\in I} G_i$ în **Ab**.

5. În categoria grupurilor ciclice nu există produsul direct al grupurilor $\mathbf{Z}_2$ și $\mathbf{Z}_3$.

6. În categoria grupurilor abeliene finite nu există suma sau produsul direct al grupurilor aditive $(\mathbf{Z}_n)_{n \in N^*}$.

7. Fie $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ o familie de spații topologice iar $(X, (p_i)_{i \in I}) = \prod_{i\in I} X_i$ și $((\alpha_i)_{i \in I}, X') = \coprod_{i\in I} X_i$ în **Ens**.

Dacă înzestrăm mulțimea X cu cea mai puțin fină topologică τ pentru care toate proiecțiile p_i sunt continue iar pe X' cu cea mai fină topologie τ' pentru care toate injecțiile α_i sunt continue, atunci $((X, \tau), (p_i)_{i \in I}) = \prod_{i\in I} (X_i, \tau_i)$ iar $((\alpha_i)_{i \in I}, (X', \tau')) = \coprod_{i\in I} (X_i, \tau_i)$ în **Top**.

8. Fie $(X_i)_{i \in I}$ și $(X'_i)_{i\in I}$ două familii de obiecte dintr-o categorie **C** ce admite produse directe iar $(f_i)_{i \in I}$ o familie de morfisme din **C** cu $f_i \in \mathbf{C}(X_i, X'_i)$, pentru orice $i \in I$.

Dacă notăm $\prod_{i\in I} X_i = (X, (p_i)_{i \in I})$ și $\prod_{i\in I} X'_i = \left(X', (p'_i)_{i\in I}\right)$, cu ajutorul proprietății de universalitate a produsului direct, se demonstrează ușor că există un unic morfism $f \in \mathbf{C}(X, X')$ a.î. $f_i p_i = p'_i f$, pentru orice $i \in I$, iar dacă fiecare f_i este monomorfism în **C**, atunci și f este monomorfism în **C**.

Convenim să notăm $f = \prod_{i\in I} f_i$ și să numim pe f *produsul direct* al morfismelor $(f_i)_{i \in I}$.

Fie $(X_i)_{i \in I}$ și $(X'_i)_{i\in I}$ două familii de obiecte dintr-o categorie **C** ce admite sume directe iar $(f_i)_{i \in I}$ o familie de morfisme din **C** cu $f_i \in \mathbf{C}(X_i, X'_i)$, pentru orice $i \in I$.

Dacă notăm $\coprod_{i\in I} X_i = ((\alpha_i)_{i\in I}, X)$ și $\coprod_{i\in I} X'_i = \left(\left(\alpha'_i\right)_{i\in I}, X'\right)$, cu ajutorul proprietății de universalitate a sumei directe, se demonstrează ușor că există un unic morfism $f \in \mathbf{C}(X, X')$ a.î. $f\alpha_i = \alpha'_i f_i$, pentru orice $i \in I$, iar dacă pentru orice $i \in I$, f_i este epimorfism în **C**, atunci și f este epimorfism în **C**. Convenim să notăm $f = \coprod_{i\in I} f_i$ și să numim pe f *suma directă* a morfismelor $(f_i)_{i \in I}$.

§ 7. Limita inductivă (proiectivă) a unui sistem inductiv (proiectiv)

Fie $(I, \leq)$ o mulțime ordonată *dirijată la dreapta* (adică pentru orice $i, j \in I$, există $k \in I$, a.î. $i, j \leq k$), iar **C** o categorie.

Definiția 7.1. Numim *sistem inductiv* de obiecte din C relativ la mulțimea de indici I o pereche $I = ((A_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i, j \in I})$ formată dintr-o familie $(A_i)_{i \in I}$ de obiecte ale lui C și o familie de morfisme $(\varphi_{ij})_{i, j \in I}$, unde $\varphi_{ij} \in C(A_i, A_j)$, pentru orice $i \leq j$, a.î.

1. $\varphi_{ii} = 1_{A_i}$ oricare ar fi $i \in I$.

2. Dacă $i \leq j \leq k$, atunci $\varphi_{jk}\, \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$.

Dacă nu este pericol de confuzie, sistemul inductiv I îl vom nota simplu $I = (A_i, \varphi_{ij})$.

Definiția 7.2. Fie $I = (A_i, \varphi_{ij})$ un sistem inductiv de obiecte din C relativ la mulțimea I (dirijată la dreapta).

O pereche $(A, (\varepsilon_i)_{i \in I})$ formată dintr-un obiect $A \in C$ și o familie de morfisme $(\varepsilon_i)_{i \in I}$, cu $\varepsilon_i \in C(A_i, A)$ oricare ar fi $i \in I$, se numește *limita inductivă* a sistemului inductiv $I = (A_i, \varphi_{ij})$, dacă:

1. Pentru orice $i \leq j$ avem $\varepsilon_j\, \varphi_{ij} = \varepsilon_i$.

2. Pentru orice $B \in C$ și orice familie $(f_i)_{i\in I}$ de morfisme cu $f_i \in C(A_i, B)$ pentru orice $i \in I$ a.î. $f_j\varphi_{ij} = f_i$ pentru orice $i \le j$, există un unic morfism $f \in C(A, B)$ a.î. $f\varepsilon_i = f_i$, pentru orice $i \in I$.

Observația 7.3. Analog ca în cazul produselor sau sumelor directe, se demonstrează că dacă $(A, (\varepsilon_i)_{i\in I})$ și $(A', (\varepsilon'_i)_{i\in I})$ sunt două limite inductive pentru sistemul inductiv $\mathbf{I} = (A_i, \varphi_{ij})$, atunci există un unic izomorfism $f \in C(A, A')$ a.î. $f\varepsilon_i = \varepsilon'_i$, pentru orice $i \in I$.

Dacă $(A, (\varepsilon_i)_{i\in I})$ este limita inductivă a sistemului inductiv **I**, convenim să notăm lucrul acesta prin $A = \varinjlim_{i\in I} A_i$.

Exemple.

1. În categoria **Ens** orice sistem inductiv admite limită inductivă.

Într-adevăr, fie $\mathbf{I} = (A_i, \varphi_{ij})$ un sistem inductiv de mulțimi iar $((\alpha_i)_{i\in I}, \overline{A}) = \coprod_{i\in I} A_i$, atunci $\overline{A} = \bigcup_{i\in I} \overline{A}_i$, *unde* $\overline{A}_i = A_i \times \{i\}$, oricare ar fi $i \in I$ (vezi § 8 de la Capitolul 1).

Pe mulțimea $\overline{A}$ definim relația binară ρ: $(x, i)\ \rho\ (y, j) \Leftrightarrow$ există $k \in I$ a.î. $i \le k, j \le k$ și $\varphi_{ik}(x) = \varphi_{jk}(y)$.

Să arătăm că ρ este o relație de echivalență pe $\overline{A}$. Cum reflexivitatea și simetria lui ρ sunt evidente, în vederea probării că ρ este tranzitivă, fie (x,i), (y,j), (z,k) trei elemente din $\overline{A}$ a.î. $(x,i)\rho(y,j)$ și $(y,j)\rho(z,k)$, adică există $t,s \in I$ a.î. $i,j \le t$, $j,k \le s$ și $\varphi_{it}(x) = \varphi_{jt}(y)$ iar $\varphi_{js}(y) = \varphi_{ks}(z)$. Găsim atunci $r \in I$ a.î. $t \le r$, $s \le r$ și cum $\varphi_{ir}(x) = (\varphi_{tr}\varphi_{it})(x) = \varphi_{tr}(\varphi_{it}(x)) = \varphi_{tr}(\varphi_{jt}(y)) = (\varphi_{tr}\varphi_{jt})(y) = \varphi_{jr}(y) = (\varphi_{sr}\varphi_{js})(y) = \varphi_{sr}(\varphi_{ks}(z)) = (\varphi_{sr}\varphi_{ks})(z) = \varphi_{kr}(z)$ deducem că $(x, i)\ \rho\ (z, k)$, adică ρ este și tranzitivă.

Fie $A = \overline{A}/\rho$, $p : \overline{A} \to A = \overline{A}/\rho$ surjecția canonică iar pentru orice $i \in I$, $\varepsilon_i = p\alpha_i$, unde $\alpha_i : A_i \to \overline{A}$ este injecția canonică de rang i.

Vom demonstra că $\varinjlim_{i\in I} A_i = (A, (\varepsilon_i)_{i\in I})$.

Într-adevăr, dacă $i, j \in I$, $i \le j$, $\varepsilon_j\varphi_{ij} = \varepsilon_i \Leftrightarrow \varepsilon_j(\varphi_{ij}(x)) = \varepsilon_i(x)$, pentru orice $x \in A_i \Leftrightarrow p(\alpha_j\varphi_{ij}(x)) = 0 \Leftrightarrow p((\varphi_{ij}(x), j) = p((x, i))$

ceea ce este evident deoarece alegând $k = j$ avem $i, j \le k$, $\varphi_{ik}(x) = \varphi_{ij}(x)$ iar $\varphi_{jk}(\varphi_{ij}(x)) = \varphi_{jj}(\varphi_{ij}(x)) = 1_{A_j}(\varphi_{ij}(x)) = \varphi_{ij}(x)$, adică $\varphi_{ik}(x) = \varphi_{jk}(\varphi_{ij}(x))$.

Fie acum B o altă mulțime iar $(f_i)_{i\in I}$ o familie de funcții cu $f_i : A_i \to B$, pentru orice $i \in I$ și $f_j\varphi_{ij} = f_i$, pentru orice $i \le j$. Ținând cont de proprietatea de universalitate a sumei directe, există o unică funcție $g : \overline{A} = \coprod_{i\in I} A_i \to B$ a.î. $g\alpha_i = f_i$, pentru orice $i \in I$.

Dacă $(x, i), (y, j) \in \overline{A}$ a.î. $(x, i)\ \rho\ (y, j)$, atunci există $k \in I$ a.î. $i, j \le k$ și $\varphi_{ik}(x) = \varphi_{jk}(y) \Rightarrow f_k(\varphi_{ik}(x)) = f_k(\varphi_{jk}(y)) \Rightarrow (f_k \circ \varphi_{ik})(x) = (f_k\varphi_{jk})(y) \Rightarrow f_i(x) = f_j(y) \Rightarrow g((x, i)) = g((y, j))$, astfel că $f : A \to B$, $f((x, i)/\rho) = g(x, i)$ este corect definită și se verifică imediat că f este unica funcție definită pe A cu valori în B cu proprietatea că $f\varepsilon_i = f_i$, pentru orice $i \in I$ și cu aceasta totul este probat. ∎

2. Vom proba, mai general, că dacă **A** este o categorie ecuațională iar $I = (A_i, \varphi_{ij})$, $i, j \in I$, $i \le j$ este un sistem inductiv în **A** pentru care există $\coprod_{i\in I} A_i$, atunci în **A** există și $\varinjlim_{i\in I} A_i$.

Într-adevăr, să presupunem că $\coprod_{i\in I} A_i = (A, (\alpha_i)_{i\in I})$ cu $\alpha_i \in \mathbf{A}(A_i, A)$ $(i\in I)$ și fie $\theta = \Theta X$ unde $X = \{(\alpha_i(x), \alpha_j(\varphi_{ij}(x))) \mid i, j \in I, i \le j$ și $x \in A_i\}$. (vezi Capitolul 2, Definiția 2.6 din [3]). Cum **A** este o categorie ecuațională $B = A/\theta \in \mathbf{A}$ iar $\overline{\alpha}_i = \pi_\theta \circ \alpha_i : A_i \to B$ este o familie de morfisme din **A** ($i \in I$ iar $\pi_\theta : A \to B$ este morfismul surjectiv canonic). Să demonstrăm că $(B, (\overline{\alpha}_i)_{i\in I}) = \varinjlim A_i$.

Să observăm la început că pentru $i, j \in I$, $i \le j$ și $x \in A_i$, datorită felului în care a fost definită θ avem că $(\alpha_i(x), \alpha_j(\varphi_{ij})(x)) \in \theta$, de unde deducem că $\pi_\theta(\alpha_i(x)) = \pi_\theta(\alpha_j(\varphi_{ij}(x)))$, adică $\overline{\alpha}_i = \overline{\alpha}_j \circ \varphi_{ij}$. Fie acum $B' \in \mathbf{A}$ și o familie de morfisme $\alpha'_i \in \mathbf{A}(A_i, B')$ a.î. pentru $i \le j$, $\alpha'_j \circ \varphi_{ij} = \alpha'_i$. Cum $A = \coprod_{i\in I} A_i$, există un unic $u \in \mathbf{A}(A, B')$ a.î. $u \circ \alpha_i = \alpha'_i$ pentru orice $i \in I$.

Deoarece pentru $i,j \in I$ cu $i \le j$ și $x \in A_i$ avem $u(\alpha'_j(\varphi_{ij}(x))) = \alpha'_i(x) = u(\alpha_i(x))$ deducem că $(\alpha'_j(\varphi_{ij}(x)), \alpha_i(x)) \in \operatorname{Ker} u$.

Cum $\theta \subseteq \mathrm{Ker}(u)$, conform Teoremei 2.14., Capitolul 2 din [3], există un unic $v \in A(B,B')$ a.î. $v \circ \pi_\theta = u$. Atunci pentru $i \in I$, $v \circ \alpha_i = v \circ (\pi_\theta \circ \alpha_i) = u \circ \alpha_i = \alpha'_i$.

Pentru a proba unicitatea lui v cu proprietatea că pentru $i \in I$, $v \circ \overline{\alpha}_i = \alpha'_i$, fie încă un morfism $w \in A(B, B')$ a.î. $w \circ \overline{\alpha}_i = \alpha'_i$ pentru orice $i \in I$.

Datorită unicității lui u, deducem că $u = w \circ \pi_\theta$ astfel că pentru $x \in A$, $v(x/\theta) = v(\pi_\theta(x)) = (v \circ \pi_\theta)(x) = u(x) = (w \circ \pi_\theta)(x) = w(x/\theta)$, de unde $w = v$. ■

Definiția 7.4. Fie $(I, \leq)$ o mulțime ordonată dirijată la dreapta. Prin *sistem proiectiv* de obiecte ale unei categorii C înțelegem un dublet $P = ((A_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i,j \in I})$ format dintr-o familie de obiecte $(A_i)_{i \in I}$ ale lui C și o familie de morfisme φ_{ij}, $\varphi_{ij} \in C(A_j, A_i)$ pentru $i, j \in I, i \leq j$ a.î.

1. $\varphi_{ii} = 1_{A_i}$, oricare ar fi $i \in I$

2. Dacă $i \leq j \leq k$, atunci $\varphi_{ik} = \varphi_{ij}\, \varphi_{jk}$.

Dacă nu este pericol de confuzie, vom nota sistemul proiectiv prin $P = (A_i, \varphi_{ij})$.

Definiția 7.5. Fie $P = (A_i, \varphi_{ij})$ un sistem proiectiv din C.

O pereche $(A, (q_i)_{i \in I})$, cu $A \in C$ și $q_i \in C(A, A_i)$ se numește *limita proiectivă* a sistemului proiectiv P dacă:

1. Pentru orice $i \leq j$ avem $\varphi_{ij} q_j = q_i$.

2. Dacă $(A', (q'_i)_{i \in I})$ este o altă pereche, cu $A' \in C$ și $q'_i \in C(A', A_i)$ a.î. pentru orice $i, j \in I$ cu $i \leq j$ să avem $\varphi_{ij}\, q'_j = q'_i$, atunci există un unic $f \in C(A', A)$ a.î. pentru orice $i \in I$, $q_i f = q'_i$.

Analog ca în cazul limitei inductive a unui sistem inductiv, se arată că dacă limita proiectivă a unui sistem proiectiv există, atunci ea este unică până la un izomorfism.

Dacă $(A, (q_i)_{i \in I})$ este limita proiectivă a sistemului proiectiv $P = (A_i, \varphi_{ij})$, convenim să notăm lucrul acesta prin $A = \varprojlim_{i \in I} A_i$.

Exemple

1. În categoria **Ens**, fie (A_i, φ_{ij}) un sistem proiectiv de mulțimi $\prod_{i \in I} A_i = \left(B, (p_i)_{i \in I}\right)$ și să presupunem că $A = \{a \in B \mid (\varphi_{ij}\, p_j)(a) = p_i(a)$ pentru orice $i \leq j\} \neq \varnothing$.

Dacă notăm pentru orice $i \in I$ prin q_i restricția lui p_i la A, atunci se probează imediat că $\varprojlim_{i \in I} A_i = \left(A, (q_i)_{i \in I}\right)$.

2. Mai general, dacă **A** este o categorie ecuațională, $\mathbf{P} = ((A_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i \leq j})$ un sistem proiectiv în **A** iar $A = \{x \in \mathop{X}_{i \in I} A_i \mid p_i(x) = \varphi_{ij}(p_j(x))$ pentru $i \leq j\} \neq \varnothing$, atunci $\varprojlim_{i \in I} A_i = (A, p_{i|A})_{i \in I})$.

3. Conform celor stabilite în finalul § 6, **Top** este o categorie cu sume și produse directe.

Fie acum $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ o familie de spații topologice iar $\mathbf{P} = (X_i, \varphi_{ij})$ un sistem proiectiv. Dacă vom considera $(X, (p_i)_{i \in I}) = \prod_{i \in I} X_i$ (în **Top**) și $Y = \{y \in X \mid \varphi_{ji}(p_i(y)) = p_j(y)$ pentru orice $i, j \in I$ cu $i \leq j\}$ atunci dacă pentru fiecare $i \in I$ notăm $p'_i = p_{i\,|\,Y}$ se verifică imediat că $(Y, (p'_i)_{i \in I}) = \varprojlim (X_i, \tau_i)$ (în **Top**).

4. Categoriile ecuaționale cu operații nule sunt categorii cu limite proiective.

Observația 7.6. În cazul particular în care $(I, \leq)$ este o mulțime total ordonată atunci limita inductivă (proiectivă) a unui sistem inductiv (proiectiv) în care pentru orice $i \in I$, $\varphi_{ij} = 1_{A_i}$ este dată de $\coprod_{i \in I} A_i$ (respectiv $\prod_{i \in I} A_i$).

Deci sumele (produsele) directe sunt cazuri particulare de limite inductive (proiective).

Definiția 7.7. Fie $I = (A_i, \varphi_{ij})$ și $I' = (A'_i, \varphi'_{ij})$ două sisteme inductive peste mulțimea I (dirijată la dreapta).

Numim *sistem inductiv de morfisme* de la **I** la **I′** o familie $(f_i)_{i \in I}$ **de morfisme cu** $f_i \in$ **C** (A_i, A'_i) **pentru orice** $i \in I$ **a.î. pentru orice** $i, j \in I$ **cu** $i \leq j$ **să avem** $f_j\, \varphi_{ij} = \varphi'_{ij}\, f_i$.

Observația 7.8. În ipoteza de la Definiția 7.7., ținând cont de proprietatea de universalitate a limitei inductive, se deduce imediat că dacă notăm $\varinjlim_{i \in I} A_i = (A, (\varepsilon_i)_{i \in I})$ și $\varinjlim_{i \in I} A'_i = (A', (\varepsilon'_i)_{i \in I})$, atunci există un unic morfism $f \in$ **C** (A, A') a.î. $f\, \varepsilon_i = \varepsilon'_i f_i$, pentru orice $i \in I$.

Morfismul f poartă numele de *limita inductivă* a sistemului inductiv de morfisme $(f_i)_{i \in I}$ și se notează $f = \varinjlim_{i \in I} f_i$ (avem un rezultat dual pentru cazul limitelor proiective).

Teorema 7.9. Orice reflefunctor păstrează limitele inductive (deci și sumele directe).

Demonstrație. Fie **C′** $\subseteq$ **C** o subcategorie reflexivă iar $R :$ **C** $\to$ **C′** un reflefunctor. Considerăm de asemenea $\mathbf{I} = (A_i, \varphi_{ij})$ un sistem inductiv din **C** și să notăm $\varinjlim_{i \in I} A_i = (A, (\alpha_i)_{i \in I})$, $(I, \leq)$ fiind o mulțime dirijată la dreapta.

Pentru a demonstra că $(R(A), (R(\alpha_i))_{i \in I}) = \varinjlim_{i \in I} R(A_i)$, să observăm că $R(\varphi_{ii}) = R(1_{A_i}) = 1_{R(A_i)}$ iar pentru $i \leq j$, $R(\alpha_j)\, R(\varphi_{ij}) = R(\alpha_j\, \varphi_{ij}) = R(\alpha_i)$, adică $(R(A), R(\varphi_{ij}))$ este un sistem inductiv în **C′**.

Fie acum $(f_i : R(A_i) \to B)_{i \in I}$ o familie de morfisme din **C′** a.î $f_j\, R(\varphi_{ij}) = f_i$, pentru orice $i \leq j$. Trebuie să probăm existența unui unic $v \in$ **C′** $(R(A), B)$ a.î. $v\, R(\alpha_i) = f_i$, pentru orice $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
R(A_i) \arrow[rr, "R(\alpha_i)"] \arrow[d, "R(\varphi_{ij})"'] \arrow[drr, "f_j"] & & R(A) \arrow[d, dashed, "v"] \\
R(A_j) \arrow[urr, "R(\alpha_j)"'] \arrow[rr, "f_j"'] & & B
\end{tikzcd}$$

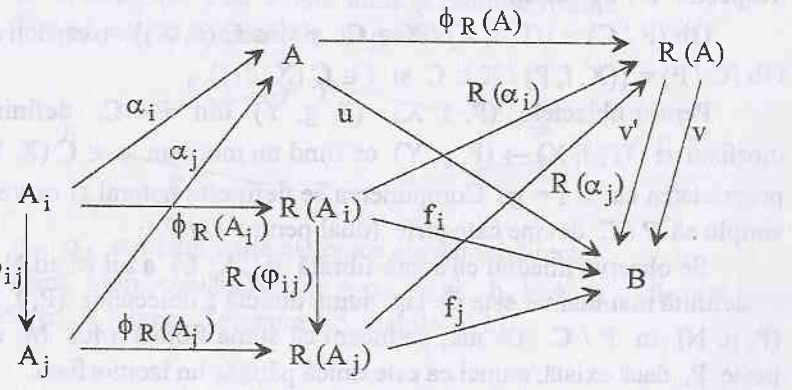
Atunci, pentru orice $i \leq j$, $f_j \phi_R(A_j) \varphi_{ij} = f_j R(\varphi_{ij}) \phi_R(A_i) = f_i \phi_R(A_i)$.

Deoarece $A = \varinjlim_{i \in I} A_i$, deducem că există un unic $u \in$ **C** (A, B) a.î. $u\, \alpha_j = f_j\, \phi_R(A_j)$, pentru orice $j \in I$.

Există atunci un unic $v \in$ **C′** $(R(A), B)$ a.î. $v\, \phi_R(A) = u$.

Avem $v\, R(\alpha_i)\, \phi_R(A_i) = v\, \phi_R(A)\, \alpha_i = u\, \alpha_i = f_i\, \phi_R(A_i)$, de unde $v\, R(\alpha_i) = f_i$, pentru orice $i \in I$.

Pentru unicitate, să presupunem că mai avem $v' \in$ **C′** $(R(A), B)$ a.î. $v'\, R(\alpha_i) = f_i$, pentru orice $i \in I$.



Atunci $v' R(\alpha_i) \phi_R(A_i) = f_i \phi_R(A_i)$, astfel că $v'\, \phi_R(A)\, \alpha_i = f_i\, \phi_R(A_i)$ și datorită unicității lui u deducem că $v'\, \phi_R(A) = u$.

Datorită unicității lui u, deducem că $v = v'$. ■

§ 8. Sume și produse fibrate

În categoria **C** considerăm diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \\ P \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & N \end{tikzcd}$$

Definiția 8.1. Numim *suma fibrată* a lui M cu N peste P ca fiind un triplet (i_M, i_N, L) , unde L ∈ C, i_M∈ C(M, L), i_N ∈ C (N, L) a.î.

1. $i_M f = i_N g$

2. Dacă (i'_M, i'_N, L') **este un alt triplet, cu L′∈ C,** $i'_M \in$ **C (M, L′),** i'_N **∈ C(N, L′) ce verifică 1., atunci există un unic u ∈ C (L, L′) a.î. u** $i_M = i'_M$ **și u** $i_N = i'_N$.

Observația 8.2. Pentru P ∈ **C** construim o nouă categorie P / **C** (respectiv **C** / P) astfel:

Ob (P / **C**) = {(P, f, X) / X ∈ **C** și f ∈ **C** (P, X)} (respectiv **Ob** (**C** / P) = {(X, f, P) / X ∈ **C** și f ∈ **C** (X, P)}).

Pentru obiectele (P, f, X), (P, g, Y) din P / **C**, definim un morfism α : (P, f, X) → (P, g, Y) ca fiind un morfism α ∈ **C** (X, Y) cu proprietatea că α f = g. Compunerea se definește natural și se verifică simplu că P / **C** devine categorie (dual pentru **C** / P).

Se observă imediat că suma fibrată (i_M, i_N, L) a lui M cu N peste P definită mai înainte este de fapt suma directă a obiectelor (P, f, M) și (P, g, N) în P / **C**. De aici deducem că suma fibrată a lui M cu N peste P, dacă există, atunci ea este unică până la un izomorfism.

Vom nota (i_M, i_N, L) = $M \coprod_P N$.

Noțiunea duală celei de sumă fibrată este aceea de *produs fibrat*. Mai precis, fie diagrama din **C**

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "f"] & \\ & P \\ N \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Definiția 8.3. Numim *produs fibrat* al lui M cu N peste P ca fiind un triplet (K, p_M, p_N), cu K ∈C, p_M∈ C(K, M), p_N∈ C(K, N) a.î.

1. $f p_M = g p_N$

2. Dacă (K', p'_M, p'_N) **este un alt triplet, cu K′ ∈ C,** $p'_M \in$ **C (K′, M),** $p'_N \in$ **C (K′, N) a.î.** $fp'_M = gp'_N$ **, atunci există un unic u ∈C (K′, K) a.î.** $up_M = p'_M$ **și** $up_N = p'_N$

Dual deducem că produsul fibrat al lui M cu N peste P, (K, p_M, p_N) este de fapt produsul direct al obiectelor (M, f, P) și (N, g, P) în categoria **C** / P și astfel, dacă produsul fibrat al lui M cu N peste P există, atunci el este unic până la un izomorfism.

Vom nota (K, p_M, p_N) = $M \prod_P N$.

Exemple

1. În categoria **Ens** există sume și produse fibrate.

Într-adevăr, să considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "\alpha_Y"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & T = Y \coprod Z \\ & Z \arrow[ur, "\alpha_Z"'] & \end{tikzcd}$$

unde α_Y, α_Z sunt injecțiile canonice ale sumei directe.

Dacă vom considera $h_Y = \alpha_Y f$ și $h_Z = \alpha_Z g$, fie (S, p) = =Coker (h_Y, h_Z) (vezi Teorema 4.5, Capitolul 1).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "h_Y"] \arrow[r, shift right, "h_Z"'] & T \arrow[r, "p"] & S \end{tikzcd}.$$

Ținând cont de proprietatea de universalitate a conucleului unei perechi de funcții, se deduce imediat că dacă vom considera $i_Z = p\,\alpha_Z$ și $i_Y = p\,\alpha_Y$, atunci $(i_Y, i_Z, S) = Y \coprod_X Z$.

Pentru existența produsului fibrat în **Ens** fie diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "f"] & \\ & X \\ Z \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$K = \{(y, z) \in Y \times Z \ / \ f(y) = g(z)\}$ iar $p_Y : K \to Y$ și $p_Z : K \to Z$ restricțiile proiecțiilor produsului cartezian $Y \times Z$ la K. Se verifică acum imediat că $(K, p_Y, p_Z) = Y \prod_X Z$.

2. Categoria **Top** posedă sume și produse fibrate.

Pentru aceasta, revenim la felul în care am făcut construcția sumei fibrate în **Ens**. Dacă vom considera pe $T = Y \coprod Z$ cu topologia sumei directe (adică cea mai puțin fină topologie de pe T pentru care α_Y și α_Z sunt continue) iar pe S cu topologia cât (căci S apare ca T factorizat prin relația de echivalență $\bar{\rho}$ generată de $\rho = \{(h_Y(x), h_Z(x)) \ / \ x \in X\}$), atunci i_Y și i_Z devin continue și totul decurge acum ca în **Ens**.

Pentru existența produsului fibrat în **Top** se procedează ca în **Ens**, echipând pe $K = \{(y, z) \in Y \times Z \ / \ f(y) = g(z)\}$ cu restricția topologi- ei produs din $Y \times Z$ la K (față de care p_Y și p_Z sunt continue).

3. Fie $G, G', G'' \in$ **Ab**, $f \in$ **Ab** (G, G''), $g \in$ **Ab** (G', G''), $K = \{(x, x') \in G \times G' \ / \ f(x) = g(x')\}$ iar $\bar{p}_G, \bar{p}_{G'}$ restricțiile la K ale proiecțiilor $p_G, p_{G'}$ ale lui $G \prod G'$ pe G și respectiv G'.

Atunci $\left(K, \bar{p}_G, \bar{p}_{G'}\right) = G \prod_{G''} G'$ în **Ab**.

4. Fie $G, G', G'' \in$ **Ab**, $f \in$ **Ab** (G'', G'), $g \in$ **Ab** (G'', G') iar $(\alpha_G, \alpha_{G'}, G \coprod G')$ o sumă directă a grupurilor G și G' în **Ab**.

Dacă notăm $H = \{\alpha_G(f(x)) - \alpha_{G'}(g(x)) \ / \ x \in G''\}$, atunci $H \leq G \coprod G'$ *iar* $(G \coprod G'/H, p\alpha_G, p\alpha_{G'}) = G \coprod_{G''} G'$ în **Ab**, unde $p : G \coprod G' \to G \coprod G'/H$ este epimorfismul canonic.

Concluzie: Categoria **Ab** posedă sume și produse fibrate.

5. Produsele fibrate se calculează în **Gr** analog ca în **Ab**.

6. Fie $G, G', G'' \in$ **Gr**, $f \in$ **Gr** (G'', G), $g \in$ **Gr** (G'', G'), $(\alpha_G, \alpha_{G'}, G \coprod G')$ o sumă directă a lui G și G' în **Gr**, $H = \{\alpha_G(f(x)) \cdot (\alpha_{G'}(g(x)))^{-1} \ / \ x \in G''\}$ iar $N(H)$ subgrupul normal al lui $G \coprod G'$ generat de H.

Dacă notăm $K = G \coprod G' / N(H)$ *iar* $p : G \coprod G' \to K$ este epimorfismul canonic, atunci $(K, p\alpha_G, p\alpha_{G'}) = G \coprod_{G''} G'$ în **Gr**.

Observația 8.4. În general, noțiunile de limită inductivă (proiectivă) a unui sistem inductiv (proiectiv), sumă directă (produs direct) a două obiecte (peste al treilea) ca și cele de nucleu și conucleu a unei perechi de morfisme (cuplu) de morfisme, apar în teoria categoriilor într-un context unitar și anume ca limite inductive sau proiective ale unor functori $F : \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ unde $\mathbf{I}$ este o categorie mică iar $\mathbf{C}$ o categorie oarecare.

Aceste cazuri particulare de limite inductive sau proiective ale unor functori particulari sunt însă suficiente pentru scopurile lucrării de față (din care cauză am și adoptat acest punct de vedere).

Cititorului dornic de aprofundarea acestor chestiuni îi recomandăm lucrarea [23].

§ 9. Obiecte injective (proiective). Anvelope injective (proiective)

Definiția 9.1. Fie C o categorie oarecare. Un obiect $A \in \mathbf{C}$ se zice *injectiv* în C dacă orice diagramă din C

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & A'' \\ & A \end{tikzcd}$$

cu u monomorfism, se scufundă într-o diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & A'' \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Vom spune despre categoria C că are *suficiente injective* (sau că este o categorie cu *scufundare injectivă*) dacă orice $A \in C$ este subobiect al unui obiect injectiv.

Exemple

1. Orice obiect final este un obiect injectiv.

2. În **Ens** orice mulțime nevidă este obiect injectiv.

3. În **Top**, orice spațiu topologic nevid înzestrat cu topologia grosieră este obiect injectiv.

Propoziția 9.2. Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de obiecte injective din C pentru care există produsul lor direct $(A, (p_i)_{i \in I}) = \prod_{i \in I} A_i$.

Atunci A este de asemenea obiect injectiv.

Demonstrație. Considerăm diagrama din **C**:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & A'' \\ & A \end{tikzcd}$$

cu u monomorfism precum și pentru orice $i \in I$ diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & A'' \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f_i"] \\ & A \arrow[r, "p_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

Găsim atunci $f_i \in \mathbf{C}(A'', A_i)$ a.î. $f_i u = p_i f$.

Din proprietatea de universalitate a produsului direct deducem existența unui unic morfism $g \in \mathbf{C}(A'', A)$ a.î. $p_i g = f_i$, pentru orice $i \in I$.

Dacă $v = g u$, avem $p_i v = p_i (gu) = (p_i g) u = f_i u = p_i f$, oricare ar fi $i \in I$, deci ținând cont de proprietatea de universalitate a produsului direct deducem că $v = f$, adică A este obiect injectiv în **C**. ■

Observația 9.3.

1. În anumite categorii, cum ar fi de exemplu cele ce posedă element nul, este adevărată și reciproca Propoziției 9.2.

2. Orice monomorfism a cărui sursă este un obiect injectiv este retractabil.

3. Fie $R : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un reflefunctor ce păstrează monomorfismele. Dacă B este un obiect injectiv în **B**, atunci B este obiect injectiv și în **A**.

Într-adevăr, să presupunem că $f : A \to C$ este monomorfism în **A** iar $g \in \mathbf{A}(A, B)$. Există $h \in \mathbf{B}(R(A), B)$ a.î. $h \circ \phi_R(A) = g$. Cum $R(f)$ este monomorfism în **B** iar B este injectiv în **B**, există $k \in \mathbf{B}(R(C), B)$ a.î. $k \circ R(f) = h$. Morfismul căutat din **A** este $k \circ \phi_R(C) : C \to B$ deoarece $k \circ \phi_R(C) \circ f = k \circ R(f) \circ \phi_R(A) = h \circ \phi_R(A) = g$.

Definiția 9.4. Un monomorfism $i \in C(X, Y)$ se zice *esențial*, dacă pentru orice morfism $f \in C(Y, Z)$ cu proprietatea că $f \circ i$ este monomorfism, deducem că f este monomorfism.

Un dublet (i, Q) se numește *anvelopă injectivă* a unui obiect X dacă Q este injectiv iar $i \in C(X, Q)$ este monomorfism esențial.

Observația 9.5. Dacă u și v sunt monomorfisme compozabile din **C**, atunci dacă u și v sunt esențiale rezultă că și uv este esențial.

Vom spune despre categoria **C** că are *proprietatea* **E** dacă pentru oricare două monomorfisme compozabile u și v din **C**, dacă uv este esențial, atunci u și v sunt esențiale.

Lema 9.6. Într-o categorie C cu proprietatea E, anvelopa injectivă a unui obiect dacă există, atunci ea este unică până la un izomorfism.

Demonstrație. Fie $A \in \mathbf{C}$ iar (i, Q), (i′, Q′) două anvelope injective ale lui A. Avem deci că $i \in \mathbf{C}(A, Q)$, $i' \in \mathbf{C}(A, Q')$ sunt monomorfisme esențiale iar Q, Q′ obiecte injective.

Cum Q′ este injectiv, deducem că există $f \in \mathbf{C}(Q, Q')$ a.î. fi $= i'$ și cum i este esențial, deducem că f este monomorfism.

Deoarece Q este injectiv, deducem că f este retractabil, adică există $f' \in \mathbf{C}(Q', Q)$ a.î. $f'f = 1_Q$.

Cum 1_Q este monomorfism esențial iar C are proprietatea E, deducem că f′ este monomorfism, iar din $f'f = 1_Q$ deducem că $(f'f)f' = f' \Rightarrow$ $\Rightarrow f'(ff') = f'1_{Q'} \Rightarrow ff' = 1_{Q'}$, adică f este izomorfism și deci $Q \approx Q'$. ■

Definiția 9.7. Vom spune că o categorie C are proprietatea de *amalgamare* dacă pentru orice familie nevidă de monomorfisme $(f_i)_{i \in I}$ cu $f_i \in \mathbf{C}(A, B_i)$ pentru $i \in I$, există $B \in \mathbf{C}$, o familie de monomorfisme $g_i \in \mathbf{C}(B_i, B)$ și un monomorfism $g \in \mathbf{C}(A, B)$ a.î. $g_i \circ f_i = g$ pentru orice $i \in I$:

$$\begin{tikzcd} & B_i \arrow[dr, "g_i"] & \\ A \arrow[ur, "f_i"] \arrow[rr, "g"'] & & B \end{tikzcd}$$

Teorema 9.8. (*Pierce R. S.*) Orice categorie ecuațională A cu suficiente injective are proprietatea de amalgamare.

Demonstrație. Fie $(f_i : A \to B_i)_{i \in I}$ o familie nevidă de monomorfisme iar pentru fiecare $i \in I$ fie monomorfismele $\alpha_i : B_i \to \overline{B}_i$ cu $\overline{B}_i$ obiect injectiv în A.

Cum în categoriile ecuaționale există produse directe, fie $B = \prod_{i \in I} \overline{B}_i \in \mathbf{A}$ (care conform Propoziției 9.2 este obiect injectiv) iar prin $p_i : B \to \overline{B}_i$ vom nota de obicei pentru $i \in I$ proiecțiile canonice.

Deoarece putem presupune $|I| \geq 2$, pentru $i, j \in I$, $i \neq j$, cum $\overline{B}_j$ este obiect injectiv, există $\alpha_{ij} \in \mathbf{A}(B_i, \overline{B}_j)$ a.î. $\alpha_{ij} \circ f_i = \alpha_j \circ f_j$. Din proprietatea de universalitate a produsului direct, pentru fiecare $i \in I$ găsim $g_i \in \mathbf{A}(B_i, B)$ a.î. pentru orice $j \in I$, $j \neq i$ să avem $p_i \circ g_i = \alpha_i$ și $p_j \circ g_i = \alpha_{ij}$:

$$\begin{tikzcd} & & & B \arrow[d, "p_i"] \\ A \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & & B_i \arrow[ur, "g_i"] \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\alpha_{ij}"] & \overline{B}_i \\ & B_j \arrow[rr, "\alpha_j"'] & & \overline{B}_j \end{tikzcd}$$

Astfel, pentru $i \neq j$ $p_i \circ g_i \circ f_i = \alpha_i \circ f_i = \alpha_{ji} \circ f_j = p_i \circ g_j \circ f_j$, de unde $g_i \circ f_i = g_j \circ f_j = g$.

Cum pentru orice $i \in I$, α_i este monomorfism și $\alpha_i = p_i \circ g_i$ deducem că g_i este monomorfism astfel că $g_i \circ f_i$ este monomorfism.

Am obținut astfel un monomorfism $g \in \mathbf{A}(A, B)$ și o familie de monomorfisme $g_i \in \mathbf{A}(B_i, B)$ a.î. $g_i \circ f_i = g$ pentru orice $i \in I$, adică A are proprietatea de amalgamare. ■

Observația 9.9. Rezultatul lui Pierce rămâne valabil pentru o categorie C cu produse directe (în care proiecțiile sunt epimorfisme) și suficiente injective.

Teorema 9.10. Fie C, C′ două categorii, $S : C \to C'$, $T : C' \to C$ doi functori covarianți a.î. S este adjunct la dreapta al lui T.

Dacă:

a) S este deplin fidel iar T este fidel

b) T păstrează monomorfismele

c) În C orice obiect admite o anvelopă injectivă,

atunci sunt echivalente următoarele afirmații:

(i) A este un obiect injectiv în C'

(ii) A este retractă a fiecăreia din extensiile sale

(iii) A nu admite extensii esențiale proprii

(iv) Morfismul de adjuncție $\psi_A : A \to (ST)(A)$ este un izomorfism și T(A) este un obiect injectiv în C.

Demonstrație. (i) $\Rightarrow$ (ii). Fie $i : A \to B$ un monomorfism în C'. Dacă A este injectiv, atunci există un $f : B \to A$ a.î. $fi = 1_A$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Dacă $f : A \to A'$ este un monomorfism esențial, atunci există un monomorfism $g : A' \to A$ a.î. $gf = 1_A$.

Atunci $g(fg) = (gf)g = 1_A g = g = g\,1_{A'}$, și cum g este monomorfism, va rezulta că $fg = 1_{A'}$, de unde deducem că $A \approx A'$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Pentru $T(A) \in C$ există un monomorfism esențial $\theta : T(A) \to Q$, cu Q injectiv. Cum T este fidel, $\psi_A : A \to S(T(A))$ este un monomorfism în C'. Vom arăta că $S(\theta)\psi_A$ este monomorfism esențial.

Pentru aceasta fie $f \in C'(S(Q), X)$ a.î. $fS(\theta)\psi_A$ să fie monomorfism. Cum S este deplin fidel, celălalt morfism de adjuncție $\phi : TS \to 1_C$ este un izomorfism functorial.

Considerăm acum în C următoarea diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "T(\psi_A)"] & T(S(T(A))) \arrow[r, "T(S(\theta))"] \arrow[d, "\phi_{T(A)}"'] & T(S(Q)) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\phi_Q"] & T(X) \\
 & T(A) \arrow[r, "\theta"] & Q &
\end{tikzcd}$$

Atunci vom avea $T(f)\,TS(\theta)\,T(\psi_A) = T(f)\,\phi_Q^{-1}\theta\phi_{T(A)}T(\psi_A)$.

Deoarece $\phi_{T(A)}T(\psi_A) = 1_{T(A)}$, vom avea $T(fS(\theta)\psi_A) = T(f)TS(\theta)T(\psi_A) = T(f)\phi_Q^{-1}\theta$.

Deoarece functorul T păstrează monomorfismele, deducem că $T(f)\phi_Q^{-1}\theta$ este monomorfism al lui C. Cum θ este esențial, atunci $T(f)\phi_Q^{-1}$ este monomorfism. Deducem că T(f) este monomorfism, ϕ_Q^{-1} fiind izomorfism.

În C' avem următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{tikzcd}
S(Q) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_{S(Q)}"'] & X \arrow[d, "\psi_X"] \\
STS(Q) \arrow[r, "ST(f)"] & STS(X)
\end{tikzcd}$$

Cum S este un adjunct la dreapta al lui T, el comută cu monomorfismele, deci ST(f) este un monomorfism. Însă avem: $S(\phi_Q)\psi_{S(Q)} = 1_{S(Q)}$ și $S(\phi_Q) = S(1_Q) = 1_{S(Q)}$, deci $\psi_{S(Q)} = 1_{S(Q)}$.

Din diagrama de mai sus rezultă că $\psi_X f = ST(f)$, deci f este un monomorfism al lui C' iar S(Q) este o extensie esențială a lui A.

Cum prin ipoteză A nu are extensii esențiale proprii, atunci $S(\theta)\psi_A$ este un izomorfism iar cum ψ_A și $S(\theta)$ sunt monomorfisme, rezultă că ele sunt izomorfisme, deci T(A) este un obiect injectiv (căci $\theta \approx TS(\theta)$).

(iv) $\Rightarrow$ (i) Considerăm în C' diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & X \\
 & A
\end{tikzcd}$$

unde i este un monomorfism.

Deoarece T comută cu monomorfismele și T(A) este injectiv, rezultă existența unui monomorfism $u : T(X) \to T(A)$ a.î. $uT(i) = f$. În C' avem următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[d, "\psi_A"] & & \\
 & & ST(A) & & \\
 & ST(X') \arrow[ur, "ST(f)"] \arrow[rr, "ST(i)"'] & & ST(X) \arrow[ul, "S(u)"'] & \\
X' \arrow[uurr, "f"] \arrow[ur, "\psi_{X'}"] \arrow[rrrr, "i"'] & & & & X \arrow[ul, "\psi_X"] \arrow[uull, "t"']
\end{tikzcd}$$

unde $t = \psi_A^{-1} S(u)\, \psi_X$. Vom avea: $ti = \psi_A^{-1} S(u) \psi_X\, i = \psi_A^{-1} S(u) ST(i) \psi_{X'} = \psi_A^{-1} ST(f) \psi_{X'} = f$, deoarece $\psi_A f = ST(f)\, \psi_{X'}$. Rezultă că A este injectiv. ■

Corolar 9.11. Fie $M \in C'$. Dacă Q este anvelopa injectivă a lui T(M) în C atunci S(Q) este anvelopa injectivă a lui M în C'.

Demonstrație. A se vedea demonstrația implicației (iii) ⇒ (iv) din teorema de mai înainte. ■

Noțiunea duală noțiunii de obiect injectiv este aceea de obiect *proiectiv*. Mai precis:

Definiția 9.12. Un obiect P al unei categorii C se zice *proiectiv*, dacă orice diagramă din C

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "f"] \\
M \arrow[r, "u"'] & N
\end{tikzcd}$$

cu u epimorfism se scufundă într-o diagramă comutativă.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] \\
M \arrow[r, "u"'] & N
\end{tikzcd}$$

Exemple

1. În **Ens** orice obiect este proiectiv.
2. În **Top** orice spațiu topologic discret este proiectiv.

Propoziția 9.13. Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de obiecte din categoria C pentru care există suma lor directă $\coprod_{i\in I} A_i = ((\alpha_i)_{i\in I}, A)$. Atunci A este de asemenea un obiect proiectiv în C.

Demonstrație. Se obține dualizând Propoziția 9.2. ■

Observația 9.14.

1. Orice epimorfism a cărui cosursă este un obiect proiectiv este secționabil.

2. În anumite categorii (cum ar fi de exemplu cele care au obiect nul) este adevărată și reciproca Propoziției 9.13.

Definiția 9.15. Un epimorfism $p \in C(X, Y)$ se zice *superflu* dacă orice morfism $f \in C(Z, X)$ cu proprietatea că pf este epimorfism este el însuși epimorfism.

Un dublet (P, p) se numește *anvelopă proiectivă* a lui X dacă P este obiect proiectiv iar $p : P \to X$ este un epimorfism superflu.

Teorema 9.16. Fie C o categorie oarecare, $S : C \to Ens$ un functor covariant și $T : Ens \to C$ un adjunct la stânga al său. Dacă

a) S este fidel

b) S comută cu epimorfismele

atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) **X este un obiect proiectiv al lui C**

(ii) Există o mulțime M și morfismele $X \xrightarrow{f} T(M) \xrightarrow{g} X$ **a.î. gf =** $\mathbf{1_X}$.

Demonstrație. (i) ⇒ (ii). Deoarece S este fidel, morfismul de adjuncție $\phi_X : TS(X) \to X$ este un epimorfism. Cum X este proiectiv, vom avea diagramă comutativă în **C**:

$$\begin{tikzcd} TS(X) \arrow[rr, "\phi_X"] & & X \\ & X \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "1_X"'] & \end{tikzcd}$$

Vom lua deci $M = S(X)$.

(ii) ⇒ (i). Vom arăta mai întâi că orice obiect al lui **C** de forma T(M) este proiectiv. Pentru aceasta fie în **C** diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] & B \\ T(M) \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

cu p epimorfism. Cum S comută cu epimorfismele și orice obiect din **Ens** este proiectiv, va exista o aplicație $\delta : ST(M) \to S(A)$ care face comutativă diagrama din **Ens**:

$$\begin{tikzcd} S(A) \arrow[rr, "S(p)"] & & S(B) \\ & ST(M) \arrow[ul, "\delta"] \arrow[ur, "S(f)"'] & \end{tikzcd}$$

În **C** avem următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "p"] & & B \\ & T(M) \arrow[ul, dashed, "g"'] \arrow[ur, "f"'] \arrow[d, shift left, "T(\psi_M)"'] & \\ TS(A) \arrow[uu, "\phi_A"] \arrow[rr, "TS(p)"] & & TS(B) \arrow[uu, "\phi_B"'] \\ & TST(M) \arrow[ul, "T(\delta)"] \arrow[ur, "TS(f)"'] \arrow[u, shift left, "\phi_{TM}"'] & \end{tikzcd}$$

cu $g = \phi_A T(\delta) T(\psi_M)$ fiind morfismul canonic de adjuncție.

Vom avea: $pg = p\phi_A T(\delta) T(\psi_M) = \phi_B TS(p) T(\delta) T(\psi_M) = \phi_B TS(f) T(\psi_M) = f \phi_{TM} T(\psi_M) = f 1_{TM} = f$, adică TM este proiectiv.

Vom arăta acum că X este proiectiv. Pentru aceasta vom considera diagrama din **C**:

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[r, "p'"] & D \\ X \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

cu p′ epimorfism. Cum T(M) este proiectiv, vom avea în **C** următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "sf"'] & & TM \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, dashed, "s"] \arrow[dr, "hg"'] & & X \arrow[dl, "h"] \\ & D' \arrow[rr, "p'"] & & D & \end{tikzcd}$$

Există atunci $s : T(M) \to D'$ a.î. $p's = hg$, de unde $p'sf = hgf = h1_X = h$, adică X este proiectiv. ■

Corolar 9.17. Dacă G este un generator proiectiv al unei categorii C în care există sume directe oarecare, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) X este proiectiv în C

(ii) Există o mulțime M și morfismele $X \xrightarrow{f} G^{(M)} \xrightarrow{g} X$ **a.î.** $\mathbf{gf=1_X}$.

Demonstrație. Dacă vom considera functorul $T : \mathbf{Ens} \to \mathbf{C}$ definit pe obiecte prin $T(M) = G^{(M)}$, pentru orice $M \in \mathbf{Ens}$ iar pentru $M, N \in \mathbf{Ens}$ și $f : M \to N$ o funcție $T(f) : G^{(M)} \to G^{(N)}$ ca fiind singurul morfism din **C** pentru care diagrama

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i \in M} G_i \arrow[rr, dotted, "T(f)"] & & \coprod_{i \in N} G_i \\ & G_i \arrow[ul, "\alpha_i"] \arrow[ur, "\beta_i"'] & \end{tikzcd}$$

este comutativă (unde $G_i = G$, pentru orice $i \in M$ iar $(\alpha_i)_{i \in I}$ sunt morfismele canonice ale sumei directe și $\beta_i : G_i \to \coprod_{i \in N} G_i$, $\beta_i = \alpha_{f(i)}$, pentru orice $i \in M$), atunci se verifică imediat că T este functor covariant.

Să demonstrăm că T este adjunct la stânga al functorului $h^G : \mathbf{C} \to \mathbf{Ens}$. În acest sens, pentru $X \in \mathbf{C}$ și $M \in \mathbf{Ens}$, vom stabili un izomorfism (functorial în X și M): $\mathbf{C}(T(M), X) \approx \mathbf{Ens}(M, h^G(X))$.

Într-adevăr, dacă $f \in \mathbf{C}((T(M), X))$, vom considera $s_f : M \to h^g(X)$ definită de $s_f(m) = f\alpha_m$, pentru orice $m \in M$.

Dacă $\beta : M \to h_G(X)$ este o aplicație oarecare, conform proprietății de universalitate a sumei directe, va exista un unic morfism din **C**, $t_\beta : G^{(M)} \to X$ care face comutativă diagrama:

$$\begin{tikzcd} G^{(M)} \arrow[rr, "t_\beta"] & & X \\ & G \arrow[ul, "\alpha_m"] \arrow[ur, "\beta_m"'] & \end{tikzcd}$$

Se verifică acum imediat că aplicațiile $f \to s_f$ și $\beta \to t_\beta$ sunt una inversa celeilalte care ne dau izomorfismul functorial căutat. Cum proiectivitatea lui G ne asigură condiția b) din Teorema 9.16 de mai înainte, totul rezultă acum din respectiva teoremă. ■

§ 10. Categorii abeliene

În cadrul acestui capitol prin **C** vom desemna o categorie cu obiect nul **O**.

Definiția 10.1. Vom spune despre categoria C că este o categorie *preaditivă* dacă:

1) Pentru orice cuplu (X, Y) de obiecte ale lui C mulțimea C (X, Y) are o structură de grup abelian (aditiv).

2) Pentru orice triplet (X, Y, Z) de obiecte ale lui C, aplicația de compunere este biaditivă (adică $g(f + f') = gf + gf'$ și $(g + g')f = gf + g'f$, pentru orice $g, g' \in \mathbf{C}(Y, Z)$ și $f, f' \in \mathbf{C}(X, Y)$).

Observația 10.2.

1. La punctul 1) din definiția de mai sus se admite tacit că pe mulțimea respectivă este dată o structură de grup aditiv care apoi se fixează.

2. Condiția 2) din definiția de mai înainte este echivalentă cu:

2') Pentru orice $f \in \mathbf{C}(X, Y)$ și $Z \in \mathbf{C}$, $h^Z(f) : h^Z(X) \to h^Z(Y)$ și $h_Z(f) : h_Z(Y) \to h_Z(X)$ sunt morfisme de grupuri.

3. Dacă (X, Y) este o pereche de obiecte din **C**, atunci $\mathbf{O}_{XY} : X \to Y$ este în mod evident elementul neutru al grupului $\mathbf{C}(X, Y)$. Dacă nu este pericol de confuzie vom nota doar prin **O** morfismul nul de la X la Y. Se deduce imediat că dacă $f \in \mathbf{C}(X, Y)$, atunci f este monomorfism în **C** dacă și numai dacă pentru orice $g \in \mathbf{C}(Z, X)$ a.î. $fg = 0 \Rightarrow g = 0$ iar f este epimorfism în **C** dacă și numai dacă pentru orice $h \in \mathbf{C}(Y, Z)$ a.î. $hf = 0 \Rightarrow h = 0$.

Exemple.

1. Dacă **C** este preaditivă, atunci și $\mathbf{C}^0$ este preaditivă.

2. Dacă A este un inel unitar, atunci categoria **C** asociată lui A (care are un singur obiect notat tot A și $\mathbf{C}(A, A) = A$) este o categorie preaditivă.

Definiția 10.3. Dacă C, C' sunt două categorii preaditive, atunci un functor $T : C \to C'$ se zice *aditiv* dacă pentru orice pereche (X, Y) de obiecte din C aplicația $T(X, Y) : C(X, Y) \to C'(T(X), T(Y))$ este un morfism de grupuri (adică pentru orice $f, g \in C(X,Y)$, $T(f+g) = T(f) + T(g)$).

Exemple

1. Dacă **C** este o categorie preaditivă, atunci functorul canonic de la **C** la C^0 este un functor aditiv.

2. Orice morfism de inele unitare induce un functor aditiv între categoriile preaditive asociate.

3. Dacă **C** este o categorie preaditivă, atunci pentru orice obiect $X \in C$ functorii h^X, $h_X : C \to \mathbf{Ab}$ sunt aditivi.

Definiția 10.4. Categoria preaditivă C se zice *aditivă* dacă posedă produse directe finite.

Exemple

1. Dacă **C** este aditivă, atunci și C^0 este aditivă.

2. Categoria **Ab** este categorie aditivă.

Propoziția 10.5. Dacă C este o categorie aditivă, atunci în C există sume directe finite.

Demonstrație. Este suficient să probăm că pentru două obiecte A_1, A_2 din **C** există suma lor directă.

Într-adevăr, dacă $A_1 \Pi A_2 = (A; p_1, p_2)$ este un produs direct al obiectelor A_1, A_2, atunci există morfismele $u_i : A_i \to A$ $(i = 1, 2)$ determinate în mod unic de relațiile $p_i u_i = 1_{A_i}$ $(i = 1, 2)$ și $p_j u_i = 0$ pentru $i \neq j$.

În plus, $s = u_1p_1 + u_2p_2 = 1_A$ (căci $p_is = p_i = p_i 1_A$ pentru $i = 1, 2$).

Vom demonstra că $(u_1, u_2; A) = A_1 \amalg A_2$.

Într-adevăr, fie $f_i : A_i \to B$, $i = 1, 2$, două morfisme din **C** și $f : A \to B$, $f = f_1p_1 + f_2p_2$. Relațiile de mai sus ne arată că $f u_i = f_i$, $i = 1, 2$.

Dacă $f' : A \to B$ este un alt morfism din **C** a.î. $f'u_i = f_i$ $(i = 1, 2)$, atunci notând $g = f - f'$ avem $g u_i = 0$, $i = 1, 2$.

Însă $g = g 1_A = g u_1 p_1 + g u_2 p_2 = 0$, adică $g = 0$, deci $f = f'$ și totul este probat. ■

Observația 10.6.

1. Dacă $(v_1, v_2; A_1 \amalg A_2)$ este o altă sumă directă a lui A_1 cu A_2, atunci există un unic morfism $f : A_1 \amalg A_2 \to A_1 \Pi A_2$ a.î. $fv_i = u_i$, $i = 1, 2$, și care în plus este izomorfism, izomorfismul invers fiind dat de $f' = v_1p_1 + v_2p_2$.

Din acest motiv într-o categorie abeliană vom identifica pe $A_1 \amalg A_2$ cu $A_1 \Pi A_2$ și vom folosi notația comună $A_1 \oplus A_2$.

2. Din cele de mai sus deducem că dacă avem o diagramă $A_1 \underset{p_1}{\overset{u_1}{\rightleftarrows}} A \underset{u_2}{\overset{p_2}{\rightleftarrows}} A_2$ a.î. $p_iu_i = 1_{A_i}$ $(i = 1, 2)$ iar $p_i u_j = 0$ dacă $i \neq j$ și $u_1p_1 + u_2p_2 = 1_A$, atunci $A = A_1 \oplus A_2$ (mai precis) $(A; p_1, p_2) = A_1 \Pi A_2$ și $(u_1, u_2; A) = A_1 \amalg A_2$).

Tot din această observație deducem că functorii aditivi păstrează sumele și produsele directe finite. De asemenea, ei păstrează obiectele și morfismele nule).

Definiția 10.7. Dacă C este o categorie aditivă și $f \in C(X, Y)$, definim *nucleul lui f* prin Ker (f) = Ker (f, 0) iar *conucleul* prin Coker (f) = Coker (f, 0) (evident dacă acestea există!)

Definiția 10.8. Despre o categorie aditivă C vom spune că este *preabeliană* dacă orice morfism din C are nucleu și conucleu.

Exemplu. Categoria **Ab** este preabeliană.

Observația 10.9. Se probează imediat că dacă **C** este preabeliană iar $f \in \mathbf{C}(X, Y)$, atunci f este monomorfism (epimorfism) dacă și numai dacă $\mathrm{Ker}(f) = 0$ $(\mathrm{Coker}(f) = 0)$.

Fie **C** o categorie preabeliană, $f \in \mathbf{C}(X, Y)$ iar $(\mathrm{Ker}(f), i)$, $(\mathrm{Coker}(f), p)$ nucleul și respectiv conucleul lui f.

Considerăm de asemenea $(\mathrm{Coker}(i), q)$ conucleul lui i iar $(\mathrm{Ker}(p), j)$ nucleul lui p. Avem atunci în **C** diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, dashed, "t"] & Y \arrow[r, "p"] & \mathrm{Coker}(f) \\
& \mathrm{Coker}(i) & \mathrm{Ker}(p) \arrow[u, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Deoarece $pf = 0$, există un unic morfism $t : X \to \mathrm{Ker}(p)$ a.î. $jt = f$.

Atunci $jti = fi = 0$, deci $ti = 0$, j fiind în mod evident monomorfism; există atunci un morfism unic $\bar{f} : \mathrm{Coker}(i) \to \mathrm{Ker}(p)$ a.î. $\bar{f}q = t$, *deci* $j\bar{f}q = jt = f$.

Dacă notăm $\mathrm{Coker}(i) = \mathrm{Coim}(f)$ și $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(f)$, obținem diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \arrow[r, "p"] & \mathrm{Coker}(f) \\
& \mathrm{Coim}(f) \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Definiția 10.10. Vom spune că diagrama de mai înainte ne dă *descompunerea canonică a lui f*; $\bar{f}$ poartă numele de *paralelul* lui f (evident un morfism poate avea mai multe descompuneri canonice).

Definiția 10.11. Numim *categorie abeliană* o categorie preabeliană C a.î. pentru orice morfism $f \in C(X, Y)$, paralelul său

$\bar{f} : \mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ din descompunerea canonică a lui f este un izomorfism.

Exemple

1. Duala unei categorii abeliene este de asemenea o categorie abeliană.

2. Categoria **Ab** este abeliană (de fapt este exemplul cel mai tipic de categorie abeliană).